

応用力学研究所研究集会報告 No.18ME-S5  
「非線形波動現象における基礎理論, 数値計算および実験のクロスオーバー」  
(研究代表者 西成 活裕)

**Reports of RIAM Symposium No.18ME-S5**  
*Crossover among theoretical, numerical and experimental studies on nonlinear waves*  
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2006

Article No. 07

# 確率的に拡張された交通流セル オートマトンの相転移ライン導出

酒井聡士 (SAKAI Satoshi), 西成活裕 (NISHINARI  
Katsuhiko), 飯田晋司 (IIDA Shinji),

(Received January 16, 2007)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
May, 2007

# 確率的に拡張された交通流セルオートマトンの相転移ライン導出

龍谷大学大学院 理工学研究科 酒井 聡士 (SAKAI Satoshi)

東京大学大学院 工学系研究科 西成 活裕 (NISHINARI Katsuhiko)

龍谷大学 理工学部 飯田 晋司 (IIDA Shinji)

## 概要

交通流セルオートマトンモデルについて、車の慣性の効果、運転手の見通しの効果、ランダムブレーキ効果をそれぞれ確率的に与えるモデルを提案し、そのシミュレーションと解析結果を発表する。この交通流モデルは、確率パラメーターを変えることで、これまでに発表された交通流モデルを表すことができる。シミュレーションについては、現実の基本図と似た現象を再現した。一方、解析では、開放系相図の相転移ラインについて、主に平均場近似を用いて理論式を導くことができた。

## 1 はじめに

交通渋滞は、近年の社会問題となっている。その社会的な損失は、国土交通省道路局調べでは金額にして年間で約 12 兆円であり、国民一人当たり年間約 9 万円相当になるといわれている。そこで、交通流モデルを用いた交通流解析が始まったという経緯である。

交通流モデルは、マクロとミクロに分けることができる。マクロな交通流モデルの例としてよく見られるのは、車の流れを連続体（波）としてとらえるバーガス方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

である。ミクロな交通流モデルは、連続モデルと離散的なモデルに分けることができる。連続モデルでよく用いられるのは、最適速度過程（OV モデル）

$$\frac{d^2 x_n(t)}{dt^2} = a \left\{ V(\Delta x_n(t)) - \frac{dx_n(t)}{dt} \right\} \quad (2)$$

である。離散的なモデルとして用いられるのは、セルオートマトン（CA）と呼ばれる手法で、独立変数、従属変数ともに離散的に表される。我々の研究では、この CA モデルを用いる。

我々が考えている「よいモデル」とは、現実的でありかつできるだけ単純な数理モデルである。その理由は、現実を求めて複雑なモデルを作成すると、そのシミュレーション結果においてある特徴が現れたときに、その原因を調べることが困難になる。逆に、単純すぎるモデルを作成しても、現実の特徴を捉えていないものであれば、シミュレーションする意味はない。したがって、「よいモデル」を作成するためには、どのような現象をモデルに組み込むかがとても重要になる。

CA に関する利点とそれに関する批判については、よく議論される。CA を用いることの利点は、その離散化という特徴より

- 数理的に現象を抽出しやすい
- 数値計算しやすく、道路形状のバリエーションなどの応用がしやすい
- 連続モデルでは無視されることの多い車の大きさを含んでいるので、現象の離散性を発見できる可能性がある

ということを挙げることができる。しかし一方で、

- 比較的歴史が浅い (S. Wolfram, 1986)
- モデル化の手法が未熟で、ルールベースになりがち
- 「よいモデル」の基準があいまい

という批判があることも避けられない。我々の現段階における研究では、バーガス方程式の拡張モデルを扱っていく。

## 2 既存のモデル

既存の主な交通流 CA モデルとその特徴をまとめると、

- Rule-184[1]
  - 前方に車がいる → 止まる, 前方に車がない → 進む
- ASEP[2]
  - ある確率で進む
- Fukui-Ishibashi (FI) モデル [3]
  - 高速度に対応
- Nagel-Schreckenberg (NS) モデル [4]
  - 高速度に対応, ランダムブレーキ効果に対応
- Quick-Start (QS) モデル [5]
  - 運転手の見直しに対応
- Slow-to-Start (SIS) モデル [6]
  - 車の慣性 (加速が遅れる効果) に対応

となる。Rule-184 は交通流モデルの中では一番単純なモデルである。また, ASEP は Rule-184 の確率版で, 動ける状態にあるときに確率  $p$  で進み確率  $1-p$  で停止するというものである。FI モデルは, 一度に 2 セル以上進むことができるモデルである。NS モデルは, ほぼ FI モデルにランダムブレーキ効果がかかったものであると考えてよい。ランダムブレーキ効果とは, 前に障害物がなくてもある確率で 1 だけ減速するものである。QS モデルは, 運転手が 2 台先を見てある程度前方の車の動きを予測している効果を取り入れたものである。SIS モデルは, 一度停止した車が 1 ステップ待つて動き出すというものである。

2004 年, 西成, 福井, Schadschneider によって

$$\text{加速} \quad v_i^{(1)} = \min\{V_{\max}, v_i^{(0)} + 1\} \quad (3)$$

$$\text{慣性} \quad v_i^{(2)} = \min\{v_i^{(1)}, x_{i+S}^{t-1} - x_i^{t-1} - S\} \quad (4)$$

$$\text{減速} \quad v_i^{(3)} = \min\{v_i^{(2)}, x_{i+S}^t - x_i^t - S\} \quad (5)$$

$$\text{衝突回避} \quad v_i^{(4)} = \min\{v_i^{(3)}, x_{i+1}^t - x_i^t - 1 + v_{i+1}^{(3)}\} \quad (6)$$

$$\text{車の移動} \quad x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{(4)} \quad (7)$$

というルールが発表された [7]。このモデルは, 車主体のラグランジュ表現で記述されていて,  $x_i^t$  は時刻  $t$  における車  $i$  の場所,  $S$  は見通しの台数を表している。現在の速度  $v_i^{(0)}$  を与えると, 次の時間ステップの速度  $v_i^{(4)}$  が求まり, その速度で全ての車を同時に動かす (パラレルアップデート)。次の時間ステップでは,  $v_i^{(0)} \leftarrow v_i^{(4)}$  として同様にルールを適用する。このルールによる車の動きを図 1 に示す。このモデルは, 見通しの効果と慣性の効果を同時に持っている。このモデルを NFS モデルと呼ぶ [8]。

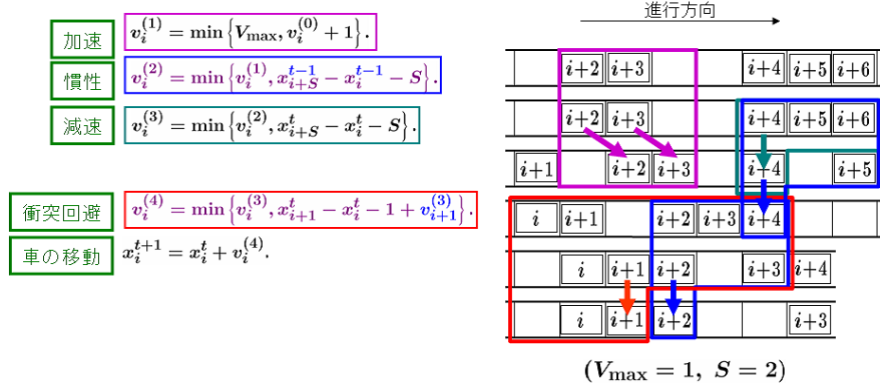


図 1. NFS モデルによる車の動きとアップデートルール

### 3 S-NFS モデル

我々は，NFS モデルを拡張した新しいモデルを提唱する．また，そのモデルを S-NFS モデルと呼び，ルールを

$$\text{加速} \quad v_i^{(1)} = \min\{V_{\max}, v_i^{(0)} + 1\} \quad (8)$$

$$\text{慣性} \quad v_i^{(2)} = \min\{v_i^{(1)}, x_{i+S}^{t-1} - x_i^{t-1} - S\} \quad \text{with the probability } q \quad (9)$$

$$\text{減速} \quad v_i^{(3)} = \min\{v_i^{(2)}, x_{i+S}^t - x_i^t - S\} \quad (10)$$

$$\text{ランダムブレーキ} \quad v_i^{(4)} = \max\{0, v_i^{(3)} - 1\} \quad \text{with the probability } 1 - p \quad (11)$$

$$\text{衝突回避} \quad v_i^{(5)} = \min\{v_i^{(4)}, x_{i+1}^t - x_i^t - 1 + v_{i+1}^{(4)}\} \quad (12)$$

$$\text{車の移動} \quad x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{(5)} \quad (13)$$

と表す [8]．また，確率  $r$  で見通し  $S = 2$ ，確率  $1 - r$  で見通し  $S = 1$  とする．このモデルは，既存のモデルを含んでいて (図 2)，とても便利なモデルである．さらに，S-NFS モデルは便利なだけでなく，現実のデータの特徴もよく再現している (図 3 参照)．

### 4 開放系境界条件と相図

以降，開放系境界条件について考える．S-NFS モデルの開放系ルールは，その見通し効果の影響で図 4 のようになる．

以上のようなルールで，S-NFS の開放系相図を求めたい．開放系相図とは，車の流入確率  $\alpha$  と流出確率  $\beta$  の変化によって現れる様相を表すものである．ASEP の場合，その開放系相図は図 5-(b) のようになる．S-NFS モデルにおいてこれを求めるために，flow- $\alpha$ - $\beta$  図を導入する．ASEP の流量と車の流入率  $\alpha$ ，流出率  $\beta$  の関係が

$$J(\alpha, \beta, p) = \begin{cases} \frac{\alpha(p - \alpha)}{p - \alpha^2} & : \text{非渋滞相} \\ \frac{\beta(p - \beta)}{p - \beta^2} & : \text{渋滞相} \\ \frac{1 - \sqrt{1 - p}}{2} & : \text{高流量域} \end{cases} \quad (14)$$

であり，臨界点が  $\alpha_c = \beta_c = 1 - \sqrt{1 - p}$  であることはすでに知られている [2]．これらの式をグラフに表したものが図 5-(a) である．

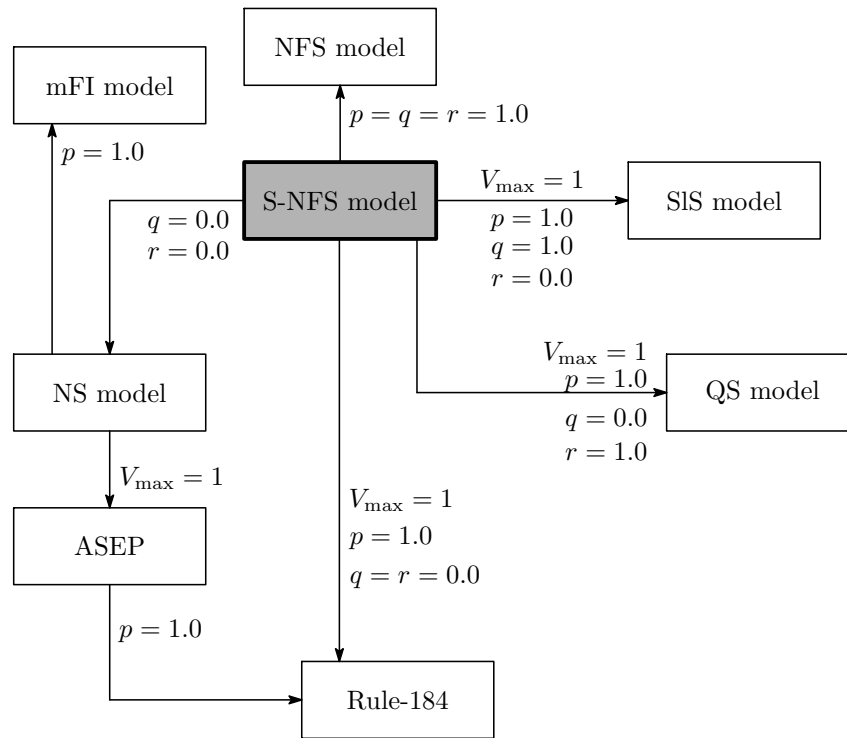


図 2. 交通流 CA モデルの関係図 (論文 [8] の図を引用)

S-NFS モデルにおける相図の相判定は、数値計算による flow- $\alpha$ - $\beta$  図を用いて行う。図 6 を見ると、 $p = 1.0$  のとき、明確な高流量相は現れず、非渋滞相と渋滞相のみ現れることがわかる。以降では、この非渋滞相と渋滞相の境目である相転移ラインを理論的に求めていく。

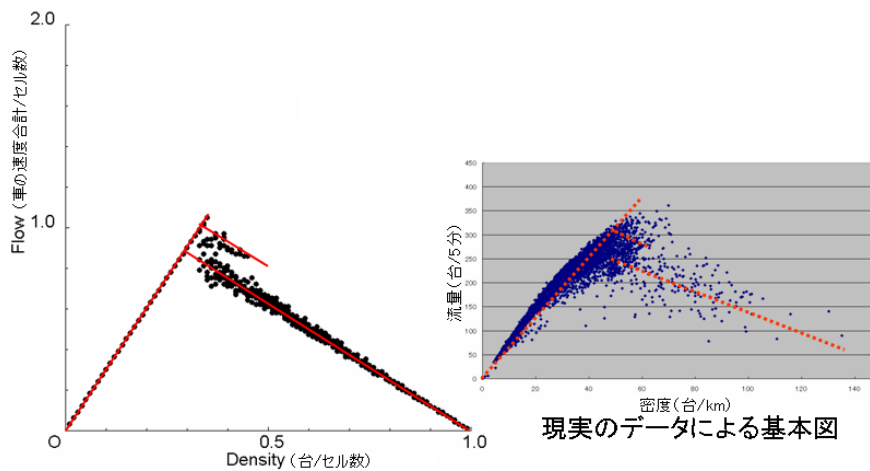


図 3. S-NFS モデルの基本図 (左) と、現実のデータによる基本図 (右)。パラメータの設定は  $V_{\max} = 3, p = 1.0, q = 0.5, r = 1.0$ 。現実のデータは、日本道路公団提供。

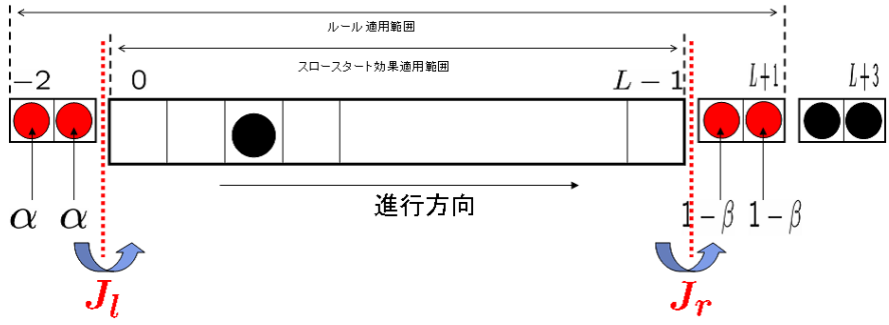


図 4. S-NFS モデルの開放系ルール

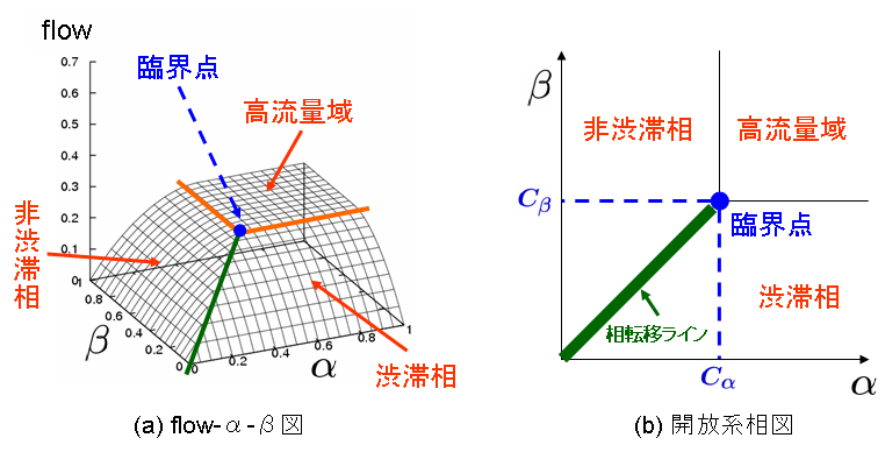


図 5. ASEP の flow- $\alpha$ - $\beta$  図と開放系相図 . パラメーターの設定は  $p = 0.75$  .

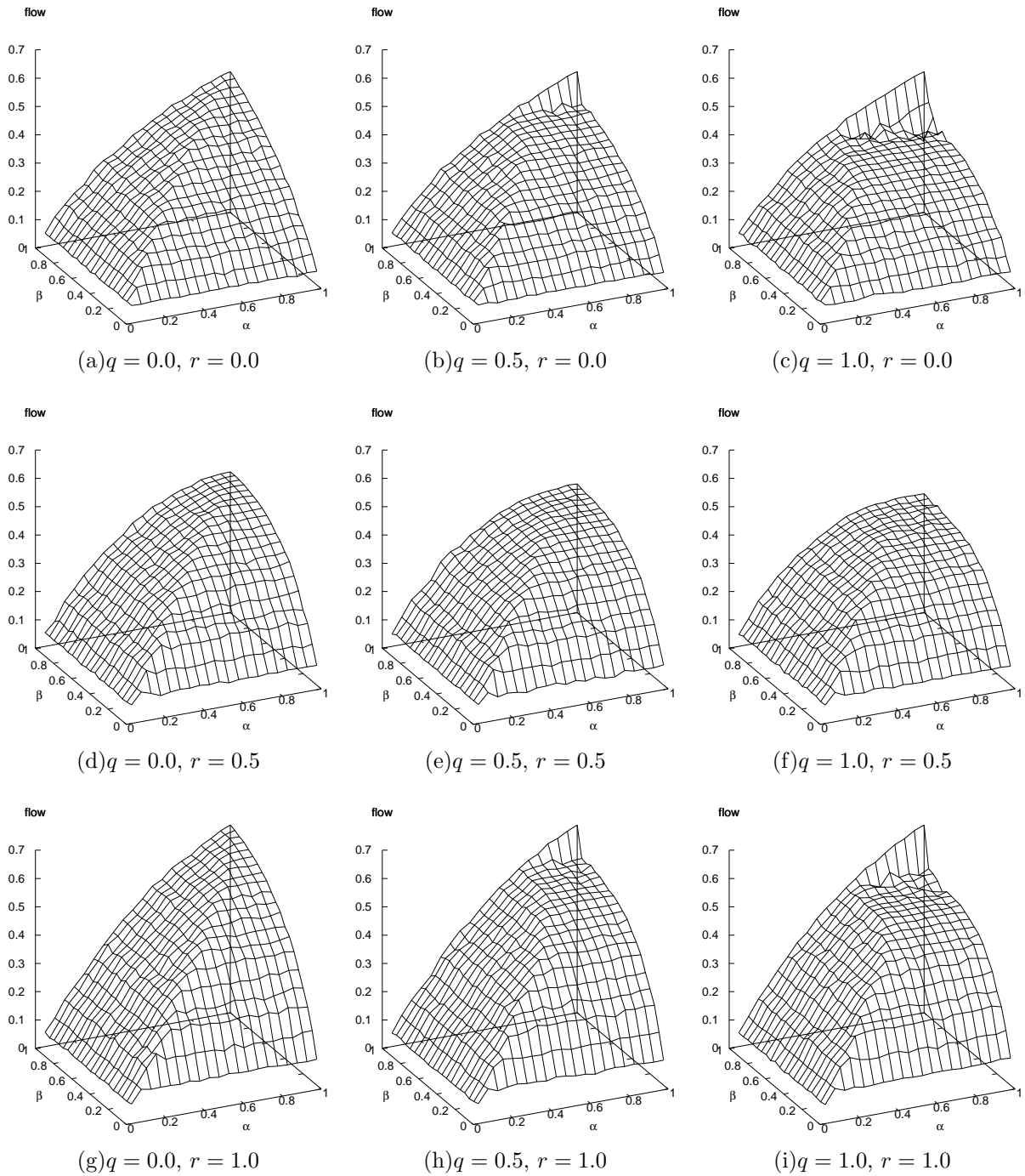


図 6. S-NFS モデル ( $p = 1.0$ ) の flow- $\alpha$ - $\beta$  図 . 図 (b), (c), (h), (i) において ,  $\beta = 1.0$  の付近で流量が急激に増加している理由は ,  $q \neq 0$  のときであっても慣性の効果が働かず , 流量低下の原因がないからである .

## 5 相転移ラインの導出

ここでは、相転移ラインを次の3つの過程で求めていく。これらは、論文 [9, 10] の手法を拡張した方法である。

### 5.1 境界付近の流量-密度の関係

まず、左右端の流量  $J_l, J_r$  と密度の関係を求める。図7は、左右端で流量が発生する車の配置である。それぞれの配置において、流量が発生する確率を平均場近似で表している。ここで、開放系ルール (図4) より  $c_{(0)} = \alpha$ 、 $c_{(L)} = c_{(L+1)} = 1 - \beta$  であるから、

$$\begin{cases} J_l = \alpha(1 - c_{(0)})(1 + rc_{(0)}) \\ J_r = \beta[1 + r(1 - \beta)]c_{(L-1)} \end{cases} \quad (15)$$

を得ることができる。

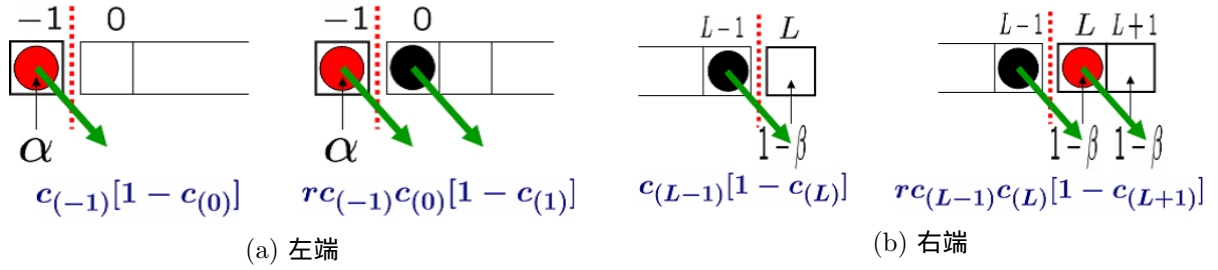


図7. 境界において流量が発生する配置

### 5.2 基本図の近似

次に、S-NFS モデルの基本図 (図8参照) を見るとほぼ直線で、渋滞相の傾きのみが変化しているように見える。そこで、基本図を

$$\begin{cases} J_f = c_{(0)} & (\text{自由走行相}) \\ J_j = x(1 - c_{(L-1)}) & (\text{渋滞相}) \end{cases} \quad (16)$$

の2本の直線で近似する (図9)。 $x$  は渋滞相の傾きの絶対値を表している。

ここで、 $x$  を渋滞クラスタの後退勾配を利用して求める。いま、渋滞クラスタの後退勾配が  $g$  になる確率を  $c_g$  とおく。すると、起こりうる後退勾配は図10の3通りとなる。そこで、これらの後退勾配の時間遷移をマスター方程式で表すと

$$u_0(t+1) = u_1(t)q(1-r) + u_2(t)q \quad (17)$$

$$u_1(t+1) = u_0(t)(1-r) + u_1(t)(1-r+qr)(1-q+qr) + u_2(t)(1-q)(1-r+qr) \quad (18)$$

$$u_2(t+1) = u_0(t)r + u_1(t)r(1-q)(1-q+qr) + u_2(t)r(1-q)^2 \quad (19)$$

となる。定常状態  $u_g := u_g(t+1) = u_g(t)$  としてこれらの式を解くと

$$u_0 = \frac{q[1-r+(1-q)r^2]}{1-2q^2r^2+q(1-r+r^2)} \quad (20)$$

$$u_1 = \frac{1-(1-q+q^2)r}{1-2q^2r^2+q(1-r+r^2)} \quad (21)$$

$$u_2 = \frac{[1-q+q^2(1-r)]r}{1-2q^2r^2+q(1-r+r^2)} \quad (22)$$



が得られ, さらに期待値  $x = 0u_0 + 1u_1 + 2u_2$  をとると,

$$x = x(q, r) = \frac{1 + r - qr + q^2r - 2q^2r^2}{1 + q - qr + qr^2 - 2q^2r^2} \quad (23)$$

が求まる.

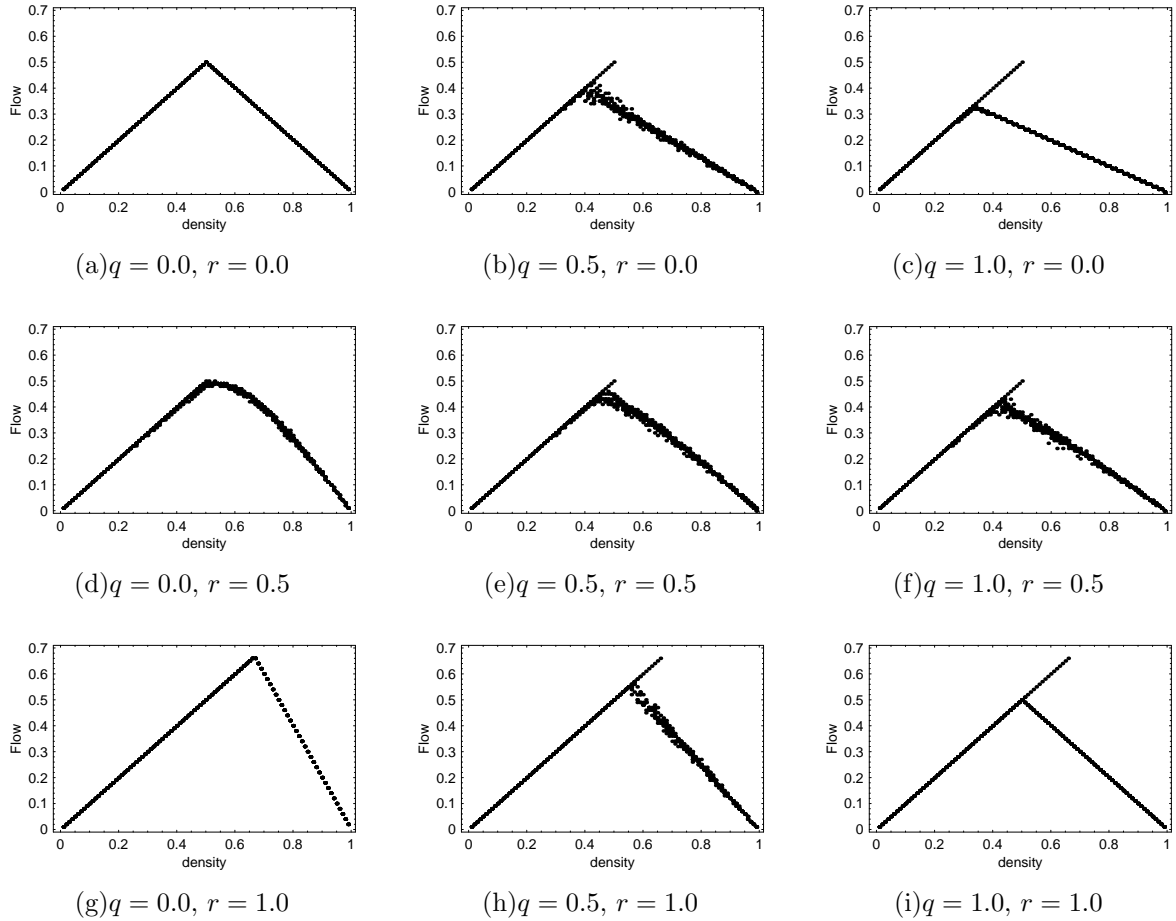


図 8. S-NFS モデル ( $V_{\max} = 1, p = 1.0$ ) の基本図

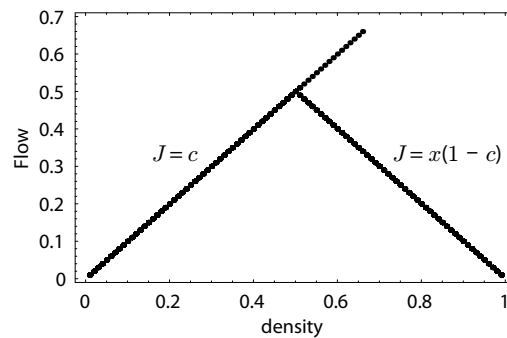


図 9. 基本図の直線による近似. パラメータは  $p = q = r = 1.0, V_{\max} = 1$ .

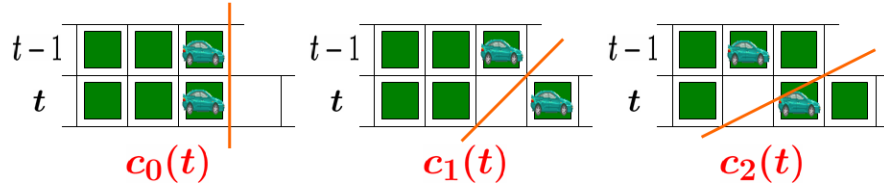


図 10. 起こりうる後退勾配と車の配置

### 5.3 相転移ラインの導出

最後に，上記の結果を利用して相転移ラインを導いていく．相転移ライン上での時空図は図 11 のように，左側は非渋滞相，右側は渋滞相となっている．したがって， $J_f = J_l$ ， $J_j = J_r$  とすると，式 (15)，(16) より

$$J_f = J_l \quad \Longrightarrow \quad c_{(0)} = \alpha[1 - c_{(0)}][1 + rc_{(0)}] \quad (24)$$

$$J_j = J_r \quad \Longrightarrow \quad x[1 - c_{(L-1)}] = \beta[1 + r(1 - \beta)]c_{(L-1)} \quad (25)$$

となる．これらの式をそれぞれの密度について解くと，それぞれの解は

$$c_{(0)} = \frac{\alpha(r-1) - 1 + \sqrt{\alpha^2(1+2r+r^2) + 2\alpha(1-r) + 1}}{2r\alpha} \quad (26)$$

$$c_{(L-1)} = \frac{x}{\beta[1 + r(1 - \beta)] + x} \quad (27)$$

となる．

ここで，図 6 より相転移ライン上では  $J_f = J_j$  であるから， $c_{(0)} = x[1 - c_{(L-1)}]$  である．これに式 (27) を代入して  $\beta$  について解くと，相転移ライン

$$\beta = \frac{1+r}{2r} + \frac{\sqrt{[c_{(0)} - x]^2(1+r)^2 + 4rx[c_{(0)} - x]c_{(0)}}}{2r[c_{(0)} - x]} \quad (28)$$

が最終的に得られる．ただし， $c_{(0)}$  は式 (26) のように， $\alpha$  と  $r$  によって記述され， $x$  は式 (23) のように  $q, r$  によって記述されている．このようにして求めた相転移ラインと，図 6 の等高線表示を比較したものが図 12 である．平均場近似という簡単な手法を用いて，シミュレーション結果にとっても近い結果を得ることができている．

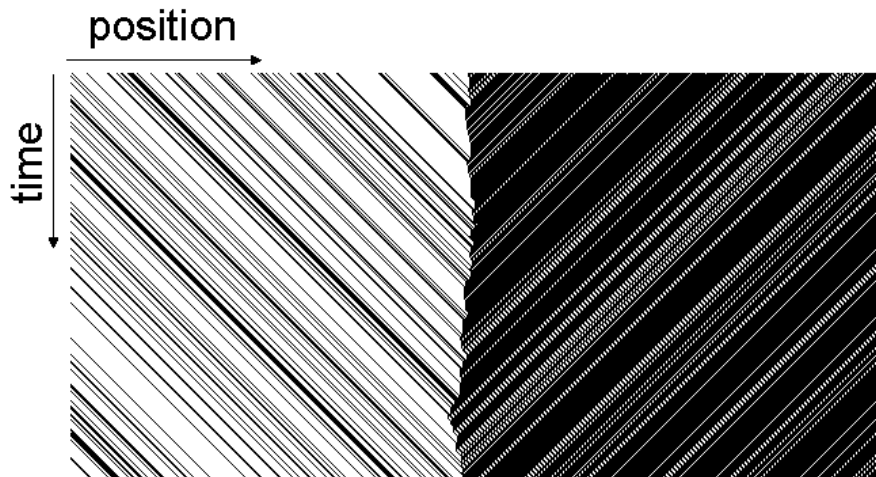


図 11. 相転移ライン上の時空図

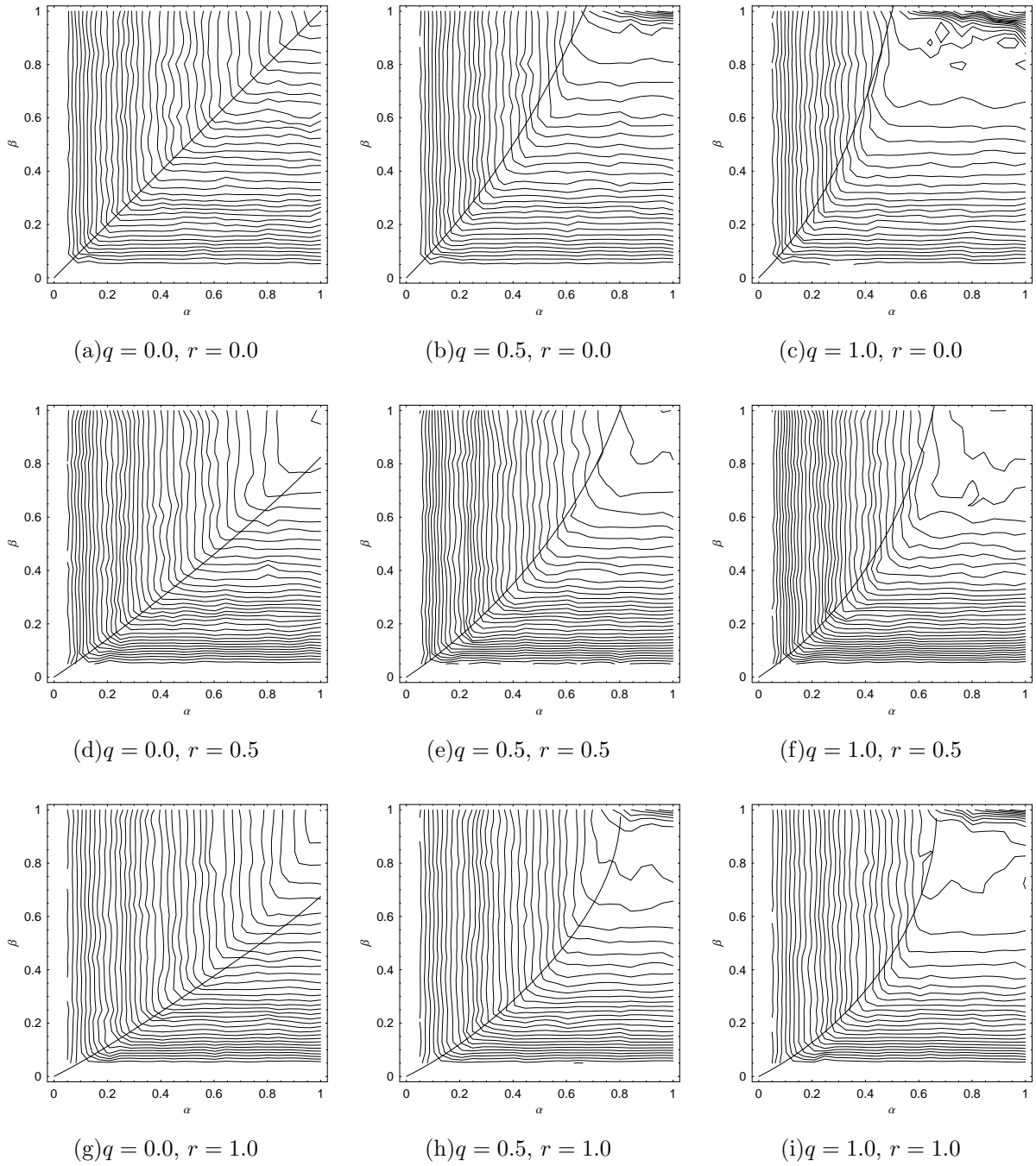


図 12. 近似的に求めた相転移ライン (28) と flow- $\alpha$ - $\beta$  図 6 の等高線表示との比較 .

## References

- [1] Wolfram S 1986 *Theory and Applications of Cellular Automata* (Singapore: World Scientific)
- [2] Rajewsky N, Santen L, Schadschneider A and Schreckenberg M 1998 *J. Stat. Phys.* **92** 151
- [3] Fukui M and Ishibashi Y 1996 *J. Phys. Soc. Japan* **65** 1868
- [4] Nagel K and Schreckenberg M 1992 *J. Phys. I France* **2** 2221
- [5] Nishinari K and Takahashi D 2000 *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 7709
- [6] Takayasu M and Takayasu H 1993 *Fractals* **1** 860
- [7] Nishinari K, Fukui M and Schadschneider A 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 3101
- [8] Sakai S, Nishinari K and Iida S 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 15327
- [9] Kolomeisky A B, Schütz G M, Kolomeisky E B, and Straley J P 1998 *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** 6911
- [10] Appert C and Santen L 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2498