

# 水平シア一流中での対流

吉川 裕 (Yoshikawa, Yutaka)\*      秋友 和典 (Akitomo, Kazunori)†

## 1 はじめに

鉛直対流は背景流にシアがある場合、ロール状に組織化されることが知られている。例えば、背景流に鉛直シアがある場合、背景流に平行なロール状 (以下平行ロール状対流と呼ぶ) に組織化されることが実験及び理論的に明らかにされている (Kuettner 1959, Asai 1970)。一方水平シアがある場合にも、対流は平行ロール状に組織化されることが理論的に指摘されていた (Davies-Jones 1971)。しかしながら、幾つかの数値実験 (例えば Yoshikawa et al. 2001) では、背景流に水平シアがある場合、背景流を斜交する方向のロール状に組織化される結果が得られてい (以下斜交ロール状対流と呼ぶ)。このことは、背景流の水平シアが対流の水平構造に及ぼす影響は、必ずしも従来知見だけで説明が尽きているわけではないことを示唆している。そこで本研究では、(1) 背景流に水平シアがある場合対流は実際に横断方向に組織化されるのか、(2) それはどのような条件で生じるのか、(3) その力学過程は何か、を明らかにするため、数値実験及び線形解析を行った。

## 2 モデルの基本設定

直交座標系で上下二つの水平板に挟まれた、拡散係数  $\kappa$ 、粘性係数  $\nu$  の非圧縮・ブシネスク流体を考える (図 1)。背景の密度・流速の基本場は時間変化しないと仮定し、以下のように与える。

$$\bar{u} = \bar{u}(y) = \Lambda y, \quad \bar{p} = \bar{p}(z) = \Gamma z, \quad \Lambda, \Gamma = \text{const.}$$

支配方程式は、流体の深さ ( $D$ ) を長さのスケール、粘性時間 ( $D^2/\nu$ ) を時間 ( $t$ ) のスケール、上下の密度差 ( $\Gamma D$ ) を密度 ( $\rho$ ) のスケールとして無次元化した以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \text{Re} \mathbf{y} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \text{Re} \hat{v} + \text{Ta}^{1/2} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u} \\ = -\nabla p - \text{Pr}^{-1} \text{Ra} \rho \hat{\mathbf{k}} + \nabla^2 \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1)$$

\*九州大学 応用力学研究所 E-mail: yosikawa@riam.kyushu-u.ac.jp

†京都大学大学院理学研究科 E-mail: akitomo@kugi.kyoto-u.ac.jp

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \text{Rey} \frac{\partial \rho}{\partial x} + w = \text{Pr}^{-1} \nabla^2 \rho \quad (3)$$

ここで  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  は無次元速度ベクトル、 $p$  は無次元圧力、 $\hat{i}$  及び  $\hat{k}$  はそれぞれ  $x$  及び  $z$  方向の単位ベクトルである。無次元パラメータは

$$\begin{aligned} \text{Prandtl number: } \text{Pr} &= \frac{\nu}{\kappa}, \\ \text{Rayleigh number: } \text{Ra} &= \frac{g \Gamma D^4}{\rho_0 \kappa \nu}, \\ \text{Reynolds number: } \text{Re} &= \frac{\Lambda D^2}{\nu}, \\ \text{Taylor number: } \text{Ta} &= \frac{4 \Omega^2 D^4}{\nu^2}, \end{aligned}$$

である ( $g$  は重力加速度)。以下では簡単のため  $\text{Pr}$  は 1.0 に固定する。上下の境界条件は滑らかでかつ密度フラックスが無いものとする。

$$\partial u / \partial z = \partial v / \partial z = w = \rho = 0, \quad \text{at } z = -1, 0$$

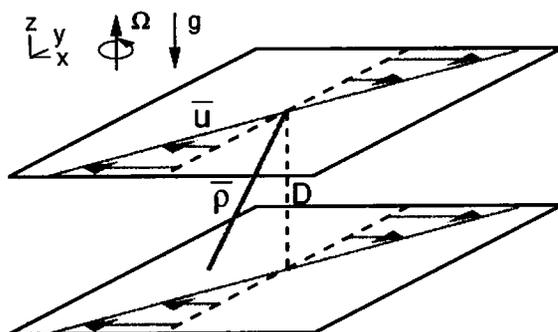


図 1: モデルの概略図

### 3 数値実験

ここでは、水平シアーが実際に対流を斜交ロール状に組織化するか、するとすればそれはどのような条件かを明らかにするために数値実験を行う。数値実験ではシアーを横切る方向に無限の領域をとることはできないので、 $y = \pm 20$  の位置に背景流に平行な壁を設置した。アスペクト比を小さくしているため、壁の影響は内部領域では無視できる程に小さい。領域を  $128 \times 256 \times 8$  個の格子で分割し、支配方程式を 2 次精度の中央差分法で近似した。時間積分はカエル飛び法に松野法を組み合わせで行った。初期に密度擾乱 ( $\rho = 2 \times 10^{-5}$ ) をランダムに与え、対流が発生し有限振幅になるまで積分を行った。

### 3.1 非回転系

図2は非回転系での結果である。水平シアーが弱い場合 ( $Re=1, 2.5$ , 図2a,b)、対流はセル状となり、水平シアーが強い場合 ( $Re=10$ , 図2c)には、対流は平行ロール状に組織化される結果となった。これらの構造は時間が経っても維持される。これらの結果は、非回転系においては水平シアーは平行ロール状に対流を組織化することを示しており、Davies-Jones (1971) の結果と一致する。

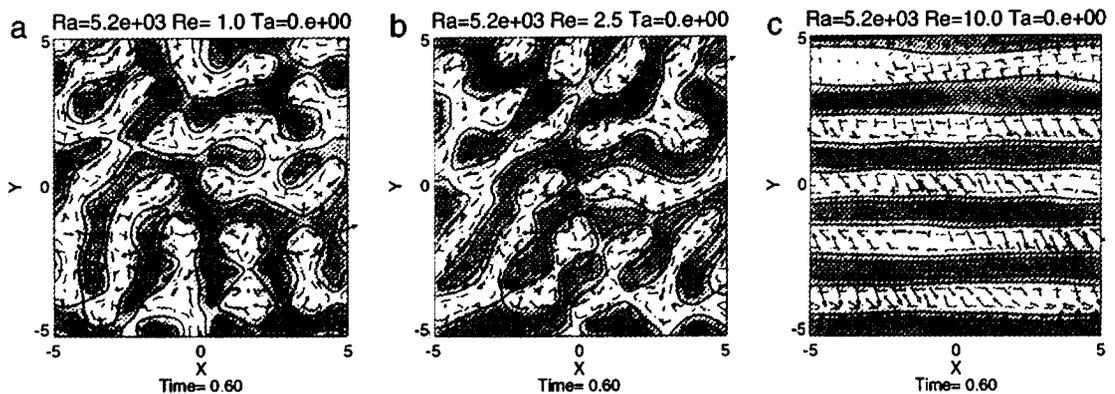


図2: 水平流速 (矢印)、鉛直流速 (印影)、密度 (実・破線) の水平断面図 (非回転系、 $t = 0.6$ )。 (a)  $Re=1$ 、 (b)  $Re=2.5$ 、 (c)  $Re=10$ 。

### 3.2 回転系

図3は回転系 ( $Ta=10^4$ ) での結果 ( $t=0.6$ ) である。水平シアーが弱い場合 ( $Re=1$ , 図3a)、対流はセル状であり、また水平シアーが強い場合 ( $Re=10$ , 図3c)には、対流は平行ロール状に組織化され、非回転系の結果と同じである。しかしながら、水平シアーが中程度の時 ( $Re=2.5$ , 図3b)、対流は斜交ロール状に組織化される結果となった。斜交ロールは背景流によって移流されているため、ロールが  $x$  軸となす角度は時間と共に変化しており、やがて ( $t \approx 0.72$ ) 斜交ロールはセル状の対流に崩壊した。この斜交ロール状対流は、Yoshikawa et al. (2001) の数値実験で再現されたものに対応する。

興味深い結果として、水平シアーが強い ( $Re=10$ ) 場合でも、始め対流はセル状であったが、いったん斜交ロール状になり、その後平行ロール状となり、有限振幅に達していた。この結果から、回転系の場合における対流の水平構造は、 $Re$  の大きさに関わらずセル状、斜交ロール状、平行ロール状の順に時間発展し、有限振幅時の水平構造はシアーによる変型の時間と有限振幅に達するまでの時間で決まると予想される。

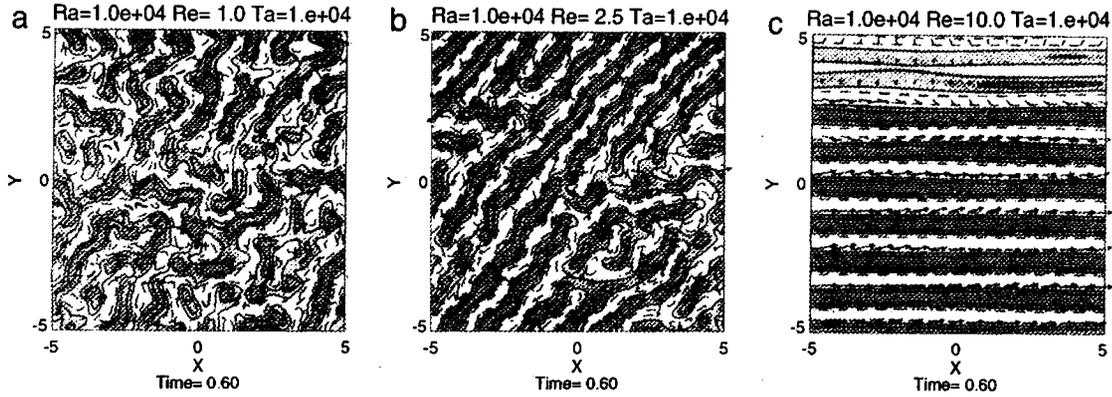


図3: 図2と同じ。ただし回転系 ( $Ta=10^4$ )。

## 4 線形解析

水平シアーによる斜交ロール状対流の形成には、セル状から斜交ロール状、そして平行ロール状へと水平構造が変型して行く重要であると予想されたが、その変型の機構は線形の力学で説明できることが数値実験の結果を詳しく調べてみた結果わかった。そこでその水平構造変型の力学機構を詳しく理解するため、線形解析を行った。

### 4.1 問題の定式化

ここでは水平シアーがもたらす効果のみに着目するため鉛直壁は取り除き、水平に無限に広がった流体を考える。基本方程式を得るため(1)-(3)式を線形化し、 $\nabla \times \text{Eq.}(1)$ のy成分、 $\nabla \times \nabla \times \text{Eq.}(1)$ のy成分、及び $\nabla_z^2 \text{Eq.}(3)$  ( $\nabla_z^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ )の3式を用意する。

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \text{Re}y \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta - \left( \text{Ta}^{1/2} - \text{Re} \right) \frac{\partial v}{\partial z} = \text{Pr}^{-1} \text{Ra} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \nabla^2 \eta, \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \text{Re}y \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 v + \text{Ta}^{1/2} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \text{Pr}^{-1} \text{Ra} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y \partial z} + \nabla^4 v, \quad (5)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \text{Re}y \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla_z^2 \rho - \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) = \text{Pr}^{-1} \nabla^2 \nabla_z^2 \rho. \quad (6)$$

この3式は、渦度のy成分 $\eta (= \partial u/\partial z - \partial w/\partial x)$ 、 $v$ 、及び $\rho$ に対する閉じた方程式系をなす。境界条件は以下のように表される。

$$\partial v/\partial z = \eta = \rho = 0 \quad \text{at } z = 0, -1,$$

従来の研究 (Davies-Jones 1971) では、擾乱は指数関数的に成長するとし、解を  $\phi = \Phi(y) \exp(i(kx + mz) + \sigma t)$  のようなモードで展開し、各モードの成長率からどのようなモードが卓越するかを論じていた。しかし、そのようなモード展開では、セル状から斜交ロール状、そして平行ロール状へと変型するトランジェントな様子を表現することはできない。そこで、ここでは数値実験の結果に基づいて、対流の水平構造が背景流とともに移流されるという、従来とは異なる以下のような定式化を用いた。

$$\begin{aligned}\eta(x, y, z, t) &= H_{kl}(t) \exp i(k(x - \text{Re}y t) + ly) \sin(\pi z), \\ v(x, y, z, t) &= V_{kl}(t) \exp i(k(x - \text{Re}y t) + ly) \cos(\pi z), \\ \rho(x, y, z, t) &= P_{kl}(t) \exp i(k(x - \text{Re}y t) + ly + \pi/2) \sin(\pi z),\end{aligned}\quad (7)$$

ここで  $H_{kl}(t)$ ,  $V_{kl}(t)$  及び  $P_{kl}(t)$  は渦度の  $y$  成分、流速の  $y$  成分、及び密度の振幅である。 $y$  方向の実際の波数は  $l - k\text{Re}t (= \tilde{l}(t))$  で与えられる ( $k\text{Re} \neq 0$  の場合時間変化する) ことに注意が必要である。これによって、対流は平行モード ( $k=0$ ) と斜交モード ( $k>0$ ) に分類される。平行モードが斜交モードよりも卓越した場合は平行ロール状対流に対応し、斜交モードが平行モードよりも卓越した場合は斜交ロール状対流に対応する。両者に大きな差が無い場合、セル状対流に対応する。

(7) 式を (4)-(6) 式に代入すると、 $H_{kl}(t)$ ,  $V_{kl}(t)$  及び  $P_{kl}(t)$  の時間に対する常微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} H_{kl}(t) \\ V_{kl}(t) \\ P_{kl}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{kl}(t) \begin{pmatrix} H_{kl}(t) \\ V_{kl}(t) \\ P_{kl}(t) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{A}_{kl}(t) = \begin{pmatrix} -(a_{kl}(t)^2 + \pi^2) & -\pi(\text{Ta}^{1/2} - \text{Re}) & -k\text{Pr}^{-1}\text{Ra} \\ \frac{\pi}{a_{kl}(t)^2 + \pi^2} \text{Ta}^{1/2} & \frac{2k\tilde{l}(t)}{a_{kl}(t)^2 + \pi^2} \text{Re} - (a_{kl}(t)^2 + \pi^2) & \frac{\pi\tilde{l}(t)}{a_{kl}(t)^2 + \pi^2} \text{Pr}^{-1}\text{Ra} \\ -\frac{k}{b^2} & \frac{\pi\tilde{l}(t)}{b^2} & -(a_{kl}(t)^2 + \pi^2)\text{Pr}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

ここで  $a_{kl}(t)^2 = k^2 + \tilde{l}(t)^2$ ,  $b^2 = k^2 + \pi^2$ 。適切な初期値のもと、上式を時間積分すれば各モードの振幅の時間発展が求まる。

## 4.2 各モードの振幅の時間発展

### 4.2.1 非回転系

$\text{Re}=0$  の場合には  $P_{kl}(t)$  は常に  $a_{kl} = 3.50$  に最大値を持つ対称的な分布をするが、 $\text{Re}=2.5$  の場合 (図4) には、 $P_{kl}(t)$  の分布の対称性は時間と共に崩れて行く。始め ( $t=0.2$ , 図4a)  $P_{kl}(t)$  は  $\text{Re}=0$  とほぼ同様に対称的な分布をしているが、 $t=0.6$  (図4b) になると  $P_{kl}(t)$  は  $(k, l) = (3.13, 2.13)$  (斜交モード) 及び  $(k, l) = (0, \pm 3.50)$  (平行モード) で極大をとるような分布となる。さらに時間が経って  $t=1.0$  (図4c) になると、斜交モードは減衰し平行モードのみが成長を続ける。

以上の時間発展は数値実験の結果を良く説明する。すなわち、始め ( $t \simeq 0.2$ ) は斜交モードと平行モードの振幅に大きな違いは見られず、従って対流は物理空間ではセル状となる。 $t \simeq 0.6$  には、 $P_{kl}(t)$  には斜交モードと平行モードの二つの極大が見られるが、両モードの振幅に大きな違いは見られず、従って対流はセル状となる。しかし時間が経つと平行モードのみが卓越するため、対流は平行ロール状となる。

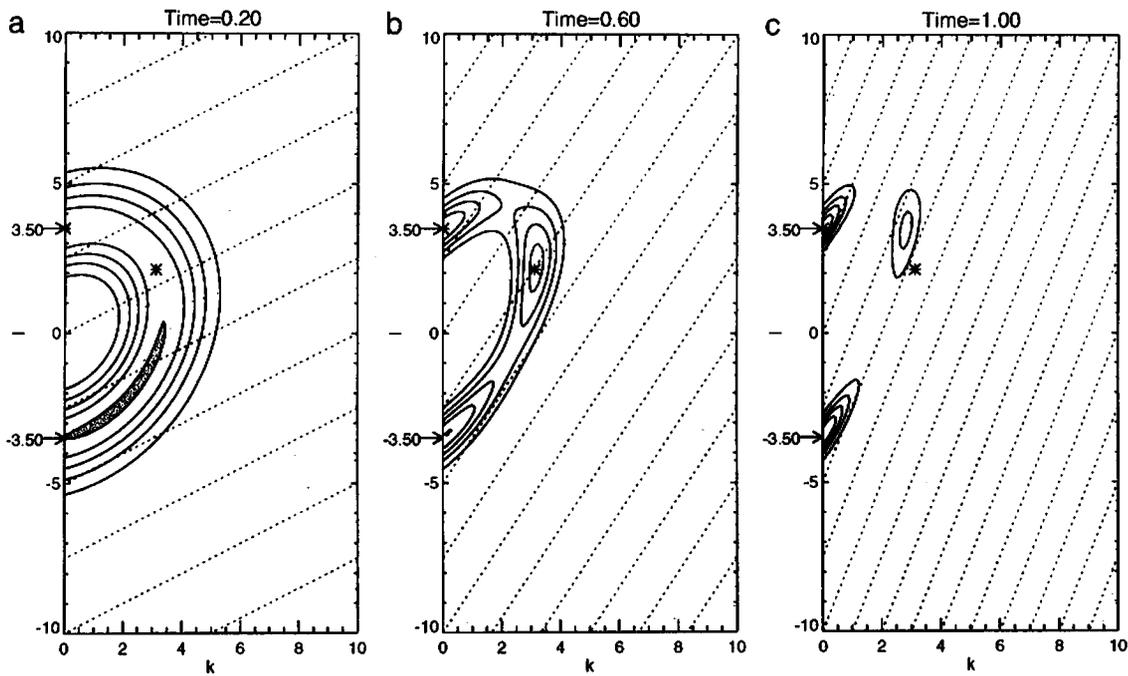


図4: 非回転系における  $P_{kl}(t)$  の時間発展 ( $Re=2.5$ )。 (a)  $t=0.2$ 、 (b)  $t=0.6$ 、 (c)  $t=1.0$ 。 横軸は  $l$ 、 縦軸は  $k$ 。  $x$  方向の実際の波数  $\tilde{l}$  は破線で表されている。  $k=0$  における  $P_{kl}(t)$  の最大値よりも大きい領域はハッチで示してある。

#### 4.2.2 回転系

非回転系と同様、 $Re=0$  の場合には  $P_{kl}(t)$  は常に  $a_{kl} = 5.25$  に最大値を持つ対称的な分布をするが、 $Re=2.5$  の場合 (図5) には、 $P_{kl}(t)$  の分布の対称性は時間と共に崩れて行く。

始め ( $t = 0.2$ 、図 5a)  $P_{kl}(t)$  は  $Re=0$  の場合と同様ほぼ対称的な分布を示すが、 $t = 0.6$ (図 5b) では  $(k, l) = (4.75, 3.63)$  (斜交モード) と  $(k, l) = (0, \pm 5.25)$  (平行モード) で極大をとり、さらに時間が経つと ( $t = 1.0$ 、図 5c) 斜交モードは減衰し平行モードのみが成長を続ける。

以上の結果は非回転系と同様であるが、大きく異なる点は斜交モードの振幅が平行モードのそれよりも  $t = 0.6$  付近で大きく (20.1%) なることである。従って、このときに斜交ロール状対流が発生する。

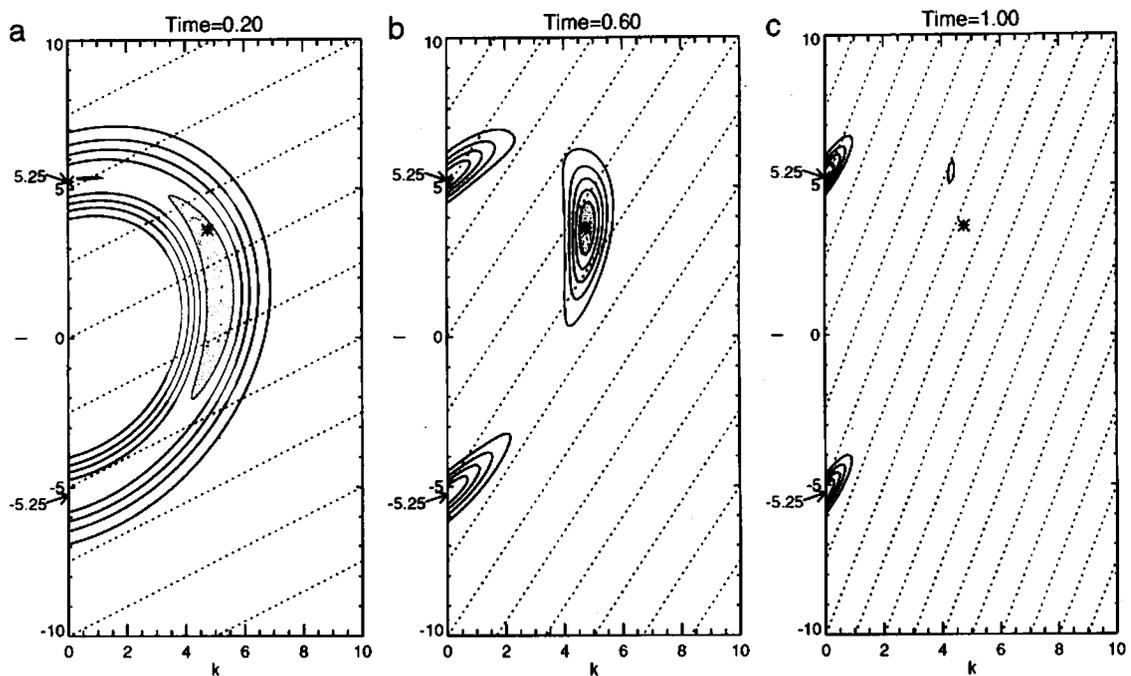


図 5: 図 4 と同じ。ただし回転系 ( $Ta=10^4$ )。

### 4.3 斜交ロール対流発生機構

各モードの  $P_{kl}(t)$  の時間変化を理解するため、各時刻での固有モードを調べた (図 6)。その結果、回転・非回転系に関わらず、レイノルズ応力や波数の時間変化に起因して、水平

シア一流中では斜交モードの方が平行モードよりも「一時的に」成長が加速される傾向にあることがわかった。しかしこの影響は全体として大きくなく、仮に(7)式で表される各モードが固有モードと同じ成長率で時間発展したとしても、斜交モードの振幅が平行モードのそれよりも卓越することはない。

次に各モードと各時刻での固有モードを比較した。非回転系の場合(図6a)、両者に大きな違いは見られなかった。従って非回転系の場合には斜交モードが平行モードよりも卓越することはない。しかし非回転系の場合(図6b)には、コリオリ力によって水平流速が右に偏向しているため、(7)式で表される各モードと固有モードとの差が位置エネルギーの開放を促進するように働く。その結果、斜交モードの成長率は固有モードの成長率より大きくなり、斜交モードが平行モードよりも大きく卓越することがわかった。

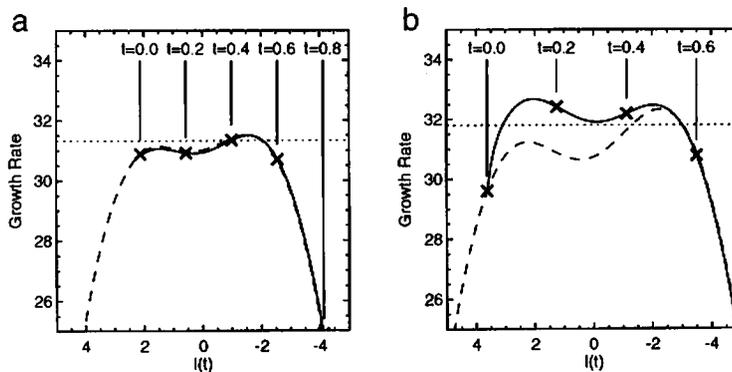


図6: (7)式で表される斜交モードの成長率(実線)、それに対応する固有モードの成長率(破線)、平行モードの成長率(破線)。(a)非回転系。 $(k, l) = (3.13, 2.13)$ の斜交モードを示す。(b)回転系。 $(k, l) = (4.75, 3.63)$ の斜交モードを示す。横軸は $l(t)$ 。時刻は図の上部に数字で示してある。

## 5 おわりに

水平シア一流中に発生する対流の水平構造を、数値実験及び線形解析により調べた。その結果、回転系の場合コリオリ力が位置エネルギーの解放を促進するように働くため、斜交ロール状対流が一時的に発生することがわかった。従って自転速度の速い木星大気に見られる横断方向に組織化された対流ロール(Hathaway and Somerville 1987)は、上述のような水平シアの影響である可能性が指摘される。

## 参照文献

- Asai, T. , Three dimensional features of thermal convection in a pale Couette flow, *J. Met. Soc. Jpn.*, 48, 18-129, 1970.
- Davies-Jones, R. , Thermal convection in a horizontal plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, 49, 193-205, 1971.
- Hathaway, R.C. and J. Sommerville , Thermal convection in a rotating shear flow, *J. Fluid Mech.*, 38, 43-68, 1987.
- Kuettner, J. , The band structure of the atmosphere; *Tellus*, 11, 267-294, 1959.
- Yoshikawa, Y., K. Akitomo, and T. Awaji , Formation process of intermediate water in baroclinic current under cooling, *J. Geophys. Res.*, 106, 1033-1052, 2001.