

大気の低周波変動の力学

九州大学・理学部 伊藤 久徳 (Hisanori ITOH)

概要

大気の低周波変動とは約 10 日以上周期を持つ変動を指す。変動は大きく、異常気象とも結びつく重要な変動であるが、そのメカニズムはよく分かっていない。ここでは比較的簡単なモデルを用いて、中緯度大気の変動における諸側面(天候レジームや低周波振動、変動の主要パターン)の力学的基礎を説明することを目的としている。

モデルは北半球の現実的な地形を持つ準地衡風モデルで、解像度は 2 層 T15 と 5 層 T21 である。このモデルはほぼ現実的な状況を再現できている。

モデルは、乱流の強さを制御するパラメータをより安定な側へ変化させると、複数のアトラクター(周期解や低周波振動を含むトーラス)を持っている。パラメータをより不安定な側(現実的な側)に変えると、系はさきの複数アトラクターの痕跡の間を不規則に移り変わるようになる。系の軌道はそこで長く捕捉され、かつ何度も訪れる。つまりカオスの中に準定常な天候レジームや低周波振動が現れている。従ってこれらの根拠は安定なパラメータにおける複数アトラクターの存在にある。

低周波変動には、比較的少数の空間パターンが卓越し、それらの時間変動は赤色雑音のように長周期が卓越するという側面がある。この根拠は、時間平均場を基本場として線型化した方程式の特異値の小さいモードの存在に求められる。これらの特異値は数百日以上緩和時間に対応し、位相空間中のこの軸の近辺では系の軌道のスピードは遅い。軌道が特異モード周辺に長く留まることによって、それらの空間パターンが卓越することになる。

1 はじめに

大気の変動(長周期)変動とは約 10 日以上周期を持つ変動を指す。この変動はたいへん重要な変動である。まず変動の強さが大きいことがあげられる。数日周期の総観規模変動(移動性高低気圧に伴う変動)はよく知られているが、低周波変動の強さはそれよりずっと大きい(e.g., Blackmon, 1976)。またブロッキングに典型的なように、異常気象とも結びつく重要な変動である。さらに中長期予報における予測可能性とも密接に関係している。このように重要な変動であるにもかかわらず、その理解は、より短い周期の総観規模変動との相互作用が必然的に入ってくることもあって、不十分なままである。従って低周波変動のメカニズムを説明することは気象学における第一級の課題となっている。

本研究の対象は低周波変動のうちでも中緯度大気のものである。観測的な研究によれば中緯度大気の変動は一見 chaotic ながら、ときとして天候レジームと呼ばれる準定常的なパターンが持続したり、間欠的に長周期振動モードが現れたりすることで特徴づけられる(e.g., Branstator, 1987; Kushnir, 1987; Mo and Ghil, 1988; Kimoto and Ghil, 1993a, b)。このような様相は大気内部の非線形性に起因すると考えられる。

非線形性によって中緯度低周波変動を説明しようとする研究として、まず Charney and DeVore (1979) があげられる。彼らは、よく知られた 2 つの天候レジーム、ブロッキングとゾーナル流に対応する非線形方程式の定常解を得、これらが天候レジームの根拠であると主張した。しかし実際の気象中で定常解はあり得なく、時間変動場でもとの定常解(不安定定常解)がいかなる意味を持つかはその後に残された課題となった。これを発

展させたのが, Legras and Ghil (1985)である。彼らは, 不安定定常解は不安定であっても時間発展において重要な役割を果たすことを示した。不安定定常解とはサドル点であり, 従って安定な固有ベクトル方向から不安定定常解へ引かれる系の軌道が多数あり, さらに不安定定常解に近づくにつれ軌道のスピードが遅くなるという根拠に基づいている。つまり不安定定常解がブロッキングであれば, ブロッキングパターンが長く持続することを意味する。Mukougawa (1988)はさらにこのことを発展させ, 不安定定常解だけでなく, 非定常極小点(時間変化が極小の点)も同様の役割を果たすことを明らかにした。また同様に不安定リミットサイクルが低周波振動の力学的根拠になりうると述べた(Mukougawa, 1994)。

このような考え方は, 単に定常解の議論に止まった Charney and DeVore を大きく超えるものであり, たいへん魅力的である。しかしながら上述の研究に用いられたモデルはすべて解像度のごく低いもの(最大で28自由度)であるので, 単なる artifact である可能性もある。現実大気を表現できるような, より大きな自由度のモデルでその当否を検証することがぜひとも必要である。本研究の第一の目的は, 比較的大きな自由度のモデルを用い, これまでの研究を検証することから, さらなる天候レジームと低周波振動の力学的根拠を追究することである。

ところで, 中緯度低周波変動には天候レジームや長周期振動など間欠的に現れる coherent なモードと同時に別の様相もある。代表的なテレコネクションパターンや経験的直交関数展開(EOF)のリーディングモードは正負の振幅がほぼ同等に現れ, 特に現れやすい振幅や周期を持たないようにみえる(e.g., Wallace and Gutzler, 1981)。この様相は, 中緯度大気システムの張る高い次元の位相空間のうち比較的低次元のサブスペースに軌道が捕捉されていると考えることができる。

線型システムにおいて EOF と力学の関係を論じたものとして, North (1984)の議論がある。線形系が self-adjoint である場合は, eigenanalysis (以下, EA という)を使うことによって, 両者の関係を理解することは簡単である。ただ通常的气象モデルのように self-adjoint でない場合は, 固有関数の直交性が満たされないので, 結果は単純ではない。まして非線形系での時間積分を EOF と対応付けるのに, EA を使ってもそれほどの理解は得られない。Dymnikov (1988)と Navarra (1993)は EA の弱点を克服するものとして, 特異値分解(singular value decomposition, 以下, SVD という)を提案し, Navarra は random forcing に対する線形系の応答を理解するのに有効であることを示した。(SVD の基礎, 利点は付録 A に書かれている。)これを受けて, Marshall and Molteni (1993), Metz (1994), Bladé (1996)らが GCM などの非線形モデルから得られた EOF を SVD から理解することを試みたが, 結論は一致していない。このように非線形系での SVD の有効性はなお論争中の問題である。

本論文の第二の目的は SVD の有効性と限界を明らかにしながら, 低周波変動の主要パターンへの新たなアプローチを行うことにある。これによって, 天候レジーム, 低周波振動に加え, 低周波変動を包括的に理解することを試みる。

なお本論文の内容は, 以上のような問題意識から書かれた Itoh and Kimoto (1996, 1997, 1999, 以下, それぞれ IK1, IK2, IK3 という)の3論文に基づいている。ここではそれらを概括し, かつ補足を行うことにする。

2 モデル

用いられたモデルは発散風の効果を含む準地衡風モデル(いわゆる線形バランスモデル)である。線形バランスとは流線関数と高度の関係が線形的にバランスしているという意味で、モデル自体はもちろん非線形である。

基本方程式系の具体的な形は掲げないので、IK1等を参照されたい。以下では、モデルに関わるいくつかの重要な点についてだけコメントを加える。まず方程式系はいわゆるドライモデルである。球面を仮定するが、扱う領域は北半球だけである。モデルの地形は現実的なものを採用している。すなわちヒマラヤ山脈とロッキー山脈が大気の運動を強く規定する。また放射はNewton加熱/冷却スキームで代用している。従って運動は温度と放射平衡温度との差によって駆動される。ここで放射平衡温度は経度方向には一様と仮定し、緯度方向の温度傾度を生み出すように決められている。具体的な形はこれもIK1を参照されたい。地表面熱フラックスはないと仮定している。

モデルの解像度としては、2層T15と5層T21が用いられた。このうち5層T21の結果は少し複雑なので、紙数の関係で本論文では示さない。従って以下でも2層モデルについてのみ説明する。2層モデルの上下端は200hPaと1000hPaである。流線関数は800hPaと400hPaで定義され、温度は600hPaで定義される。上の境界条件はrigidで、下の境界条件は地表面の凹凸に水平風があたり、鉛直運動が強制されるように課している。

モデルの制御パラメータとして静的安定度 S をとる。これを制御パラメータに取った理由は、 S の大小がモデルの乱れの強さを制御しており、モデルの振る舞いの変化を見るという目的にとって適切であると考えられるからである。その標準値は $1.2 \times 10^{-6} m^4 s^2 kg^{-2}$ である。以下では、簡単のため、その単位、 $\times 10^{-6} m^4 s^2 kg^{-2}$ 、は省略する。

3 天候レジームと低周波振動

まず S の標準値、1.20で静止大気からの時間積分を行った。結果、このモデルは大陸東岸のジェットとその下流のストーム・トラック、さらに下流のdiffluent領域と、そこでの低周波変動の卓越をうまくシミュレートしている。総観規模変動と低周波変動の強さは現実より少し弱い、ほぼ妥当な大きさである。

変動を解析するために、まずEOF解析を行った。上層だけでEOF解析を行ってもほぼ同じ結果になるが、ここでは後の都合のため、上層と下層の流線関数を両方とも用いて、EOF解析を行った。EOFの第一モード(EOF1)における上層でのパターンを示したのが図1である。

EOF1と2で存在確率密度(PDF)を描いたのが図2である。3つのPDFの高いところが見える。これらの名前をX(ほぼ中央の大きな範囲)、M、Pと名付ける。このうち、Xはかなり広い領域でPDFが大きく、現実の天候レジームとは対応しない。一方、残りの2つ(MとP)の領域は狭く、パターンはほぼ一定している。また特にPは存在確率も回りに比べそれほど高くなく、かなり不明瞭である。さらに軌道を詳しく見ると、2つの領域では軌道は停滞していることが分かる。PとMに関するこのような位相構造は現実大気为天候レジームとよく対応している。

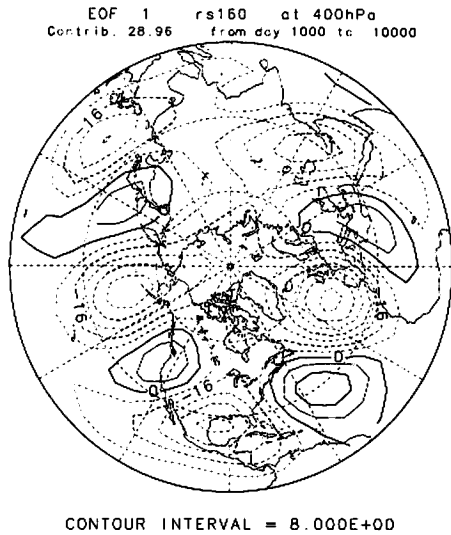


図 1: $S = 1.20 \times 10^{-6} \text{m}^4 \text{s}^2 \text{kg}^{-2}$ の実験における EOF1 の上層での流線関数パターン。正が実線、負が破線で示している。コンター間隔は任意である。EOF1 の全分散に対する貢献度は 29.0%。EOF 解析は 1,000 日~10,000 日間で行った。

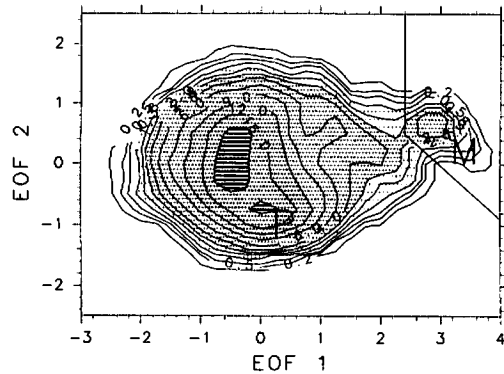


図 2: $S = 1.20 \times 10^{-6} \text{m}^4 \text{s}^2 \text{kg}^{-2}$ の実験における EOF1 と 2 で張られる平面での確率密度関数の分布。M と P は 2 つのレジームを示す。軸は EOF1 の時間係数の標準偏差で規格化されている。コンター値は 100 倍されており、0.013 (0.028) より大きい値の領域は軽い (中間的な) 陰影がつけられている。コンターの最大は 0.20 である。2 つの直線はレジーム M の境界を定義する線で、図 5 の計算に用いられる。

天候レジーム間の遷移には preferred route のあることが知られている (e.g., Kimoto and Ghil, 1993b)。このモデルではその性質もうまく示している。すなわち $X \rightarrow P \rightarrow M$ のルートははっきりしており、その逆はほとんどない。また $X \rightarrow M$ より、 $M \rightarrow X$ が卓越する。

卓越周期を見るためにスペクトル解析を行った。結果が図 3 の実線で示されている。周期約 20 日の低周波振動が卓越していることが明らかである。すなわちこのモデルは低周波振動も保持している。

これらの根拠を探るため、大きな S 、すなわち系の振る舞いが単純になるであろう S で様々な計算を行った。まず $S = 2.00$ で組織的に定常解・時間依存解を探索した (IK1)。その結果、3 つのアトラクターが見いだされた。以下では、これらのアトラクター、およびこれらに出自を持つ「アトラクターの痕跡」(attractor ruin) を、X, M, P と名付けることにする。(標準実験におけるレジームの名前と同じにしたのは最終的にはこれらが結びつくからである。) X は総観規模振動と周期約 25 日の低周波振動を持つトラス、M と P は総観規模振動を示す周期解である。比較的大規模な系でのこれらの見つけ方、およびこれらの詳細な性質については IK1 を参照されたい。

そこから S を徐々に小さくする。まず $S = 1.84$ で X が不安定化し、P に収束した。さらに S を小さくすると、今度は P が不安定化し、M に収束した。つまりこの時点ではもともと 3 つあったアトラクターのうちただひとつのアトラクター M だけが生き残った。

さらに S を小さくする。すると $S = 1.56$ で最後のアトラクターも不安定化し、解の振る舞いが大きく変化

する分岐点をむかえる。すなわちアトラクターはその領域を大きく広げ、Mはもちろん、もとのPやXを含むようになる。しかしながら軌道は位相空間内のすべての場所を等確率で動くのではなく、長く留まり何度も訪れる場所が存在しているように見える。実際、様々な方法でそのような場所が3カ所同定され、それらはそれぞれもとのアトラクターに対応していることが分かった。系の軌道は「アトラクターの痕跡」で長く捕捉され、かつ何度も訪れるので、これは天候レジームそのものの性質である。

このような振る舞いは他の物理系でも最近見つかっている「カオスの遍歴」(chaotic itinerancy)(*e.g.*, Ikeda *et al.*, 1989; Kaneko, 1990)といわれる現象と考えられ、上述の分岐点は非線型力学で言う explosive bifurcation にあたる。

「アトラクターの痕跡」間の遷移ルートはアトラクターが不安定化したときの性質を反映していた。つまりPへはXから、PはMへと不安定化時と同じ遷移をする。最後のアトラクターMの不安定化は当然、 $M \rightarrow X$ のルートが「開ける」ことが条件なので、MからXのほうが卓越するのは自然である。

パラメータをさらに不安定側にずらしてみる。そうすると3つのレジームのうちひとつの領域(X)がますます大きくなり、残りの2つの領域(PとM)は小さく、かつ見えにくくなる。このような変化を被りながら、 S の標準値1.20での結果につながっていく。そして標準実験における3つのレジームは各々もとのアトラクターに対応していることが確認できた。

標準実験におけるXの領域はもとよりかなり大きくなっていった。この領域が広がるという性質は、もともとアトラクターXが位相空間の比較的「平坦な」場所に存在していたことから生じたものである。このことは複数アトラクターが安定に存在する $S = 2.00$ での時系列を示した図から理解できる(図省略)。アトラクターPやMへの軌道の収束の仕方に比べ、Xへのそれは大変ゆっくりしている。Xへ収束する場合はいろいろな初期値から始めても、同様にゆっくりと収束する(図省略)。

以上から、少なくともこのモデルでは、複数の「アトラクターの痕跡」が、すなわち安定なパラメータにおける複数アトラクターの存在が天候レジームの力学的根拠であるということが明らかにされた。

図3は $S = 1.86$ のXにおけるスペクトルも表している。 $S = 1.86$ はXが不安定になる直前の値である。低周波にスペクトル・ピークを持っており、周期は約25日である。標準実験 $S = 1.20$ では約20日となっており、少し短くなっているが、ほぼ対応している。また標準実験での振動はXで卓越していることも示せる。さらに低周波振動のパターンもほぼ保持されている。これらのことより標準実験での低周波振動はアトラクターXの低周波振動がもとなっていることは明らかである。ピーク値は $S = 1.20$ でかなり強くなっている。Xの広がりに対応していると考えられる。これも現実の低周波振動をうまく説明できる。

4 低周波変動の主要パターン

EOF1や2では、低周波振動に対応する20日付近のピークを除くと、red noiseになっており、低周波変動が卓越している(図省略)。しかも図2からわかるように、振幅は正規分布に近い形で、正負に渡って分布している。そこで次にこのような低周波パターン卓越の理由を考察する。

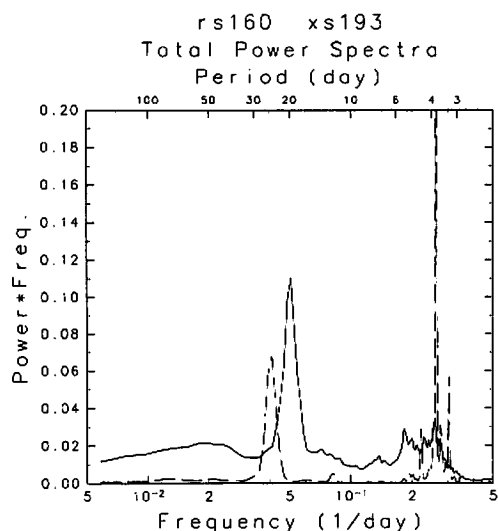


図 3: $S = 1.20 \times 10^{-6} \text{m}^4 \text{s}^2 \text{kg}^{-2}$ (実線) と $S = 1.86 \times 10^{-6} \text{m}^4 \text{s}^2 \text{kg}^{-2}$ (破線) におけるパワースペクトルの全モードの和。周波数をかけて表している。

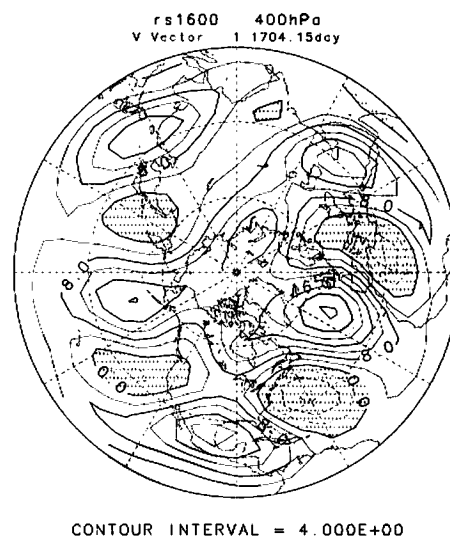


図 4: SVD V1 における上層の流線関数パターン。正は実線で、負は破線と陰影で示されている。コンター間隔は任意である。

まず時間平均を基本場にして線形化したときの線形方程式を考える。線形方程式を考察する根拠は、上で述べたようにこの低周波変動が線形的な様相を示しているからである。

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi + A\psi = f. \quad (1)$$

ここで、右辺は非線形項を含む強制項である。A は線形化行列であるが、当然 zonally varying field を基本場とする線形化行列である。低周波変動はゆっくりした変動なので、第一近似として時間変化項を小さいとして無視する。すると強制問題となり、連立方程式を解くことによって解を得ることができる。この解の性質を調べるには、SVD が有用である。この詳細は、「はじめに」でも述べたように付録において与えられている。要するに、強制が white であれば (正確には u ベクトルと f との内積が white であれば)、特異値 σ_i の小さい v ベクトル v_i のパターンが卓越することになるということである。時間変化があったとしても、

$$Av_i = \sigma_i u_i$$

となるので、特異値 σ のごく小さいパターンに対しては、ほとんど時間変化項が効かず (言い換えると位相空間における軌道のスピードが小さく)、 f がゆっくり変化する限り、上の考察がそのまま生きてくる。

そこで、 $S = 1.20$ での時間平均場を基本場として線形化した行列 A に対して SVD を行う。出力される v ベクトル、 u ベクトルは当然、2 層のパターンを持つ。上述の EOF で、上下層を使ったのは SVD と直接に対応させるためである。実際に特異値を計算すると、第一番目の特異値がたいへん小さいことが分かった。その値は 5.87×10^{-4} である。この逆数が damping の time constant に対応し、それは 1,704 日となる。従ってこれに付随するパターンが強制に対して強く応答することになる。すなわちこの励起のメカニズムは定常波の線形共鳴であると言える。実際にパターンを比較すると、第一 v ベクトル (以下、SVD V1 という) のパターン (図

4) は EOF1 のパターン (図 1) とほぼ一致していることがわかる。上層における流線関数のパターンの相関係数を計算すると、0.846 となる。

EOF1 のパターンの時間変化が全体としてゆっくりしていることは、位相空間における EOF1 からの距離と軌道速度を対応させることから確認できる。図 5a がその結果である。軌道速度の計算は総観規模の現象に伴う軌道の変化を除くために、事前に low-pass filter をかけている。明らかに EOF1 に近いほうがスピードが遅いことを確認できる。EOF1 からの距離と軌道速度との相関係数は 0.465 である。

EOF1 の代わりに SVD V1 からの距離として描いたのが図 5b である。パターンがよく似ているので、全体の分布もよく似ているが、まず大きな違いとして目立つのが、距離は遠いけれども速度の遅いところに点がかなり散らばっていることである。この多くは「アトラクターの痕跡」M 内の点である。これらの点を除くと、相関係数は 0.303 から 0.383 まではね上がる。従ってこの場合の EOF1 とは、SVD V1 が「アトラクターの痕跡」の存在によって修正されたパターンとしてとらえられるかもしれない。

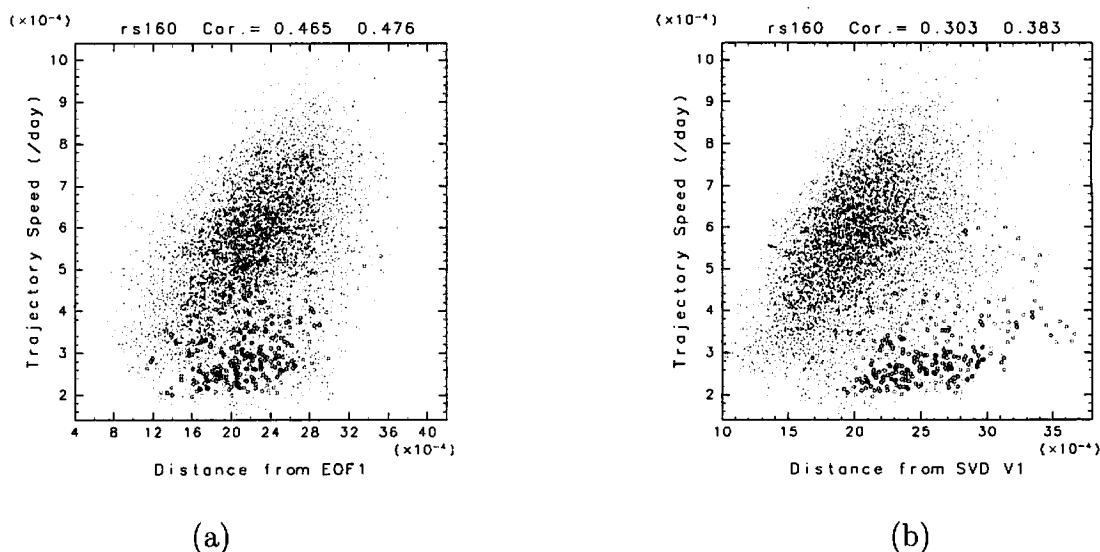


図 5: $S = 1.20 \times 10^{-6} \text{m}^4 \text{s}^2 \text{kg}^{-2}$ の実験において、位相空間における (a) EOF1 と (b) SVD V1 からの距離と軌道速度の scatter プロット。軌道速度は lowpass filter を通してから計算されている。o 印は「アトラクターの痕跡」M 内の点を表している。M の内外は図 2 の 2 直線で定義されている。

EOF1 が SVD V1 に近いという性質は平均場の周辺で位相構造が「平坦」であることによって保証される。(上で述べたことを言い換えると、EOF1 を SVD V1 から遠ざけているのは「平坦」でない「アトラクターの痕跡」の存在である。) すなわち基本場は位相空間内のある点であるが、そこでの linear subspace の議論が広い範囲に適用できることの確認が必要である。IK3 では実際にこのことをいくつかの観点から確かめている。

以上より、卓越周期を持たない低周波変動の卓越パターンは、時間平均場を基本場とする線形方程式の singular mode として理解できる。この軸の周辺では系の軌道速度が遅く、軌道が長く留まるために卓越パターンとなる。

5 議論

ここでは通常の議論と異なって、力学系の話に慣れていない人を対象に2つの補足をすることにする。

まず第一に、現実的なパラメータでの系の振る舞いを理解するために、 S の大きな値、すなわち非現実的な値での系の振る舞いを持ってきた。これに違和感を覚える人がいるかもしれない。しかしこのようなことは数値実験ではごくごく普通のことである。例えば、大気に対する山岳の影響を理解するために、山岳を取り去った数値実験がよく行われる。このときの制御パラメータは山の高さであり、山岳のない「単純」で非現実な世界から現実を理解しようとする。今の場合、モデル大気の振る舞い自体が理解の対象である。この場合、振る舞いを単純にするようなパラメータが選ばれ、そして非現実の世界との対比から現実が理解される。

第二に、現実的なパラメータ値でのモデルの振る舞いにおいてのみ「勝負」している人にとって、天候レジーム内の系のバランスが気になるかもしれない。例えば、天候レジーム内で総観規模擾乱は天候レジームを維持するように働くのか否かという問題である。本研究のアプローチからは、特に計算せずとも、直接にこの答が導ける。天候レジームはもともと総観規模擾乱を含むアトラクターであったのだから、総観規模擾乱は全体としてレジームを維持する方向に働いていると。

6 結論

5層 T21 の結果も含め、次のような結果を得た。低周波変動は少なくとも3つの側面を持っている。すなわち天候レジーム、低周波振動と卓越周期のない red noise 型の低周波変動である。またこれらの力学的根拠を以下のように明らかにできた。

天候レジームと低周波振動の力学的根拠は、パラメータが安定なときのアトラクター、およびその内部の低周波振動である。さらにカオスの遍歴が起こった後、これらの「アトラクターの痕跡」のうちのあるものは、パラメータの不安定側への変化とともに、その領域を大きくするという変化を被る。これはそのアトラクターが「平坦な」位相構造のもとにあったため生じたものである。その結果、領域が大きくなったものはその内部でパターンが大きく変動することになり、もはやひとつの天候レジームであるとは言えなくなる。一方、他のものはその内部でパターンがほぼ一定し、現実的な天候レジームの様相を示すようになる。低周波振動のほうは、領域が大きくなった「アトラクターの痕跡」内の低周波振動が大きな振幅を示すので、これも現実的な様相を示すことになる。すなわち、天候レジームと低周波振動の力学的根拠をより正確に述べると、それぞれ位相構造が「微細な」「アトラクターの痕跡」と構造が「平坦な」「アトラクターの痕跡」の低周波振動であると言える。

不安定定常解や非定常極小点の重要性を述べた Legra and Ghil たちの結果は低解像度での artifact と考えられる。総観規模変動がある限り、軌道は不安定定常解や非定常極小点には近づけない。なぜならこれらは大規模場から構成されているのに対し、軌道は常に総観規模を含むからである。

卓越周期を持たない低周波変動は傾圧波の発達が十分でないモデルでは比較的単純な現れ方をする。すなわ

ち時間平均場を基本場とする線形方程式の singular mode がその低周波変動の卓越パターンとして現れる。従ってその発現のメカニズムとしては線形共鳴であると言える。基本場が少々変化しても、singular mode は類似なパターンを持つことも明らかにされた。ただし傾圧波が強くなり局在化してくると、transient eddy forcing の効果が効いてきて、パターンは singular mode からかなりずれてくる。従ってこのときの卓越パターンは、singular mode と transient eddy forcing の相互作用の結果決まってくると言える。また天候レジームの存在もパターンに影響を与える。

謝辞

本研究は木本昌秀氏(東京大学気候システム研究センター)との共同研究を私の視点でまとめたものです。彼の存在無しにはこの研究はあり得ませんでした。深く感謝します。また本研究は東京大学気候システム研究センターの一般共同研究でもあります。

図は電腦ライブラリを使って描かれている。

A SVDの基礎

方程式,

$$Ax = f \quad (2)$$

を考える。このモデルでは A が時間平均場を基本場とした線形化行列、 x が流線関数、 f が非線形項を含む強制項である。以下では固有ベクトルは常に正規化されているとして話を進める。

A の singular value decomposition(SVD) とは

$$A = U\Sigma V^t \quad (3)$$

と書けることである。ここで U と V は正規直交行列、 V^t は V の転置行列、 Σ は diagonal matrix で、 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ となる。 σ は実数で、 $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots$ という関係があり、特異値と呼ばれる。 U basis、 V basis のメンバーは、それぞれ u ベクトル (または左 singular vector)、 v ベクトル (または右 singular vector) と呼ばれる。また、 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ は $A^t A$ (AA^t でも同じ) の固有値の正の平方根に対応し、 V の第 i 列は固有値 σ_i^2 に対する $A^t A$ の固有ベクトル、 U の第 i 列は固有値 σ_i^2 に対する AA^t の固有ベクトルである。これらから

$$x = \sum_{i=1}^n v_i \frac{(u_i, f)}{\sigma_i} \quad (4)$$

と書ける。ここで (y, z) はベクトル y と z の内積を表す。従って強制が white なら、 v_1 が最も卓越しやすいモードであると結論することができる。さらに σ_1 が非常に小さい場合には、強制がどうあろうと、それにあまり依存せず、 v_1 のパターンが卓越することになる。

SVD と通常の eigenanalysis (EA) のどちらを使うかは、当然ながら問題に依存する。SVD は特異値が実数のみで、 u ベクトルどうし、 v ベクトルどうしが直交していることにより、いろいろと議論を発展させやすい

という利点を持っている。さらに $\sigma_1 \leq |\lambda_1|$ (λ_1 は λ_i のなかでもっとも絶対値の小さいもの) という関係も証明できる (IK3)。ここから SVD で考えたほうが卓越パターンが理解しやすいということが言え、これが SVD のもうひとつの重要な利点である。

参考文献 (紙数の関係で主なものを掲げる。)

- Blackmon, M. L., 1976: A climatological spectral study of the 500mb geopotential height of the Northern Hemisphere. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 1607–1623.
- Bladé, I., 1996: On the relationship of barotropic singular modes to the low-frequency variability of a general circulation model. *J. Atmos. Sci.*, **53**, 2393–2399.
- Branstator, G., 1987: A striking example of atmosphere's leading traveling pattern. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 2310–2323.
- Itoh, H., and M. Kimoto, 1996: Multiple attractors and chaotic itinerancy in quasi-geostrophic model with realistic topography: Implications for weather regimes and low-frequency variability. *J. Atmos. Sci.*, **53**, 2217–2231
- , and ———, 1997: Chaotic itinerancy with preferred transition routes appearing in an atmospheric model. *Physica*, **D109**, 274–292.
- , and ———, 1999: Weather regimes, low-frequency oscillations, and principal patterns of variability: A perspective of extratropical low-frequency variability. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 2684–2705.
- Kimoto, M., and M. Ghil, 1993a: Multiple flow regimes in the Northern Hemisphere winter. Part I: Methodology and hemispheric regimes. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 2625–2643.
- , and ———, 1993b: Multiple flow regimes in the Northern Hemisphere winter. Part II: Sectorial regimes and preferred transitions. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 2645–2673.
- Kushnir, Y., 1987: Retrograding wintertime low-frequency disturbances over the North Pacific Ocean. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 2727–2742.
- Legras, B. and M. Ghil, 1985: Persistent anomalies, blocking and variations in atmospheric predictability. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 433–471.
- Mo, K.-C., and M. Ghil, 1988: Cluster analysis of multiple planetary flow regimes. *J. Geophys. Res.*, **93**, 10,927–10,952.
- Mukougawa, H., 1988: A dynamical model of “quasi-stationary” states in large-scale atmospheric motions. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 2868–2888.
- Navarra, A., 1993: A new set of orthonormal modes for linearized meteorological problems. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 2569–2583.