

2層モデルによる回転球面上の乱流

東京大学理学系研究科 北村 祐二 (Yuji KITAMURA)

東京大学理学系研究科 松田 佳久 (Yoshihisa MATSUDA)

1 序

回転球面上での乱流は、非発散順圧渦度方程式を用いた研究 (Williams, 1978; Yoden and Yamada, 1993; など) 及び浅水方程式系を用いた研究 (Cho and Polvani, 1996; 北村, 松田, 1999) がなされている。これらの研究はいずれも水平方向の非線形相互作用のみを考慮した2次元問題を扱ったものであり、鉛直方向の構造はあらかじめ仮定されている。しかし、3次元流体での非線形相互作用を議論するのであれば、水平方向の相互作用のみを考慮して鉛直モード間の相互作用を完全に無視することは妥当であるとはいえず、鉛直モード間の相互作用を考慮した上で2次元乱流の発展を議論することが重要であるように思われる。また、傾圧モードに対する方程式の線形項は浅水方程式系と同じであるが、非線形項は鉛直方向に異なるモード間での相互作用を含むので、非線形項が重要な時に順圧モードのみの2次元乱流と傾圧モードも含んだ2次元乱流の振る舞いがどのように異なるのかを調べる事は意義のある事であろう。

そこで、本研究では鉛直モード間の相互作用を議論するための最も単純なモデルとして、球面上の2層モデルにより減衰性乱流の数値実験を行い、順圧モードのみの場合と結果の比較を行った。

2 数値モデル

鉛直方向に2層おいた球面上 p 座標プリミティブ方程式系を考える。各変数は図1のように配置し、 $p=0, p_s$ で $\omega=0$ の境界条件を課す。このとき、無次元化した方程式系は以下のように書き下せる:

(順圧モード)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_t}{\partial t} = & -\frac{1}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \left(\frac{f}{Ro_a} + \zeta_t \right) U_t + \zeta_c U_c + D_c V_c \right\} \right. \\ & \left. + (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \left(\frac{f}{Ro_a} + \zeta_t \right) V_t + \zeta_c V_c - D_c U_c \right\} \right] - \nu_{2p} \left((-\Delta)^p - 2^p \right) \zeta_t, \quad (1) \end{aligned}$$

(傾圧モード)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_c}{\partial t} = & -\frac{1}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \left(\frac{f}{Ro_a} + \zeta_t \right) U_c + \zeta_c U_t \right\} \right. \\ & \left. + (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \left(\frac{f}{Ro_a} + \zeta_t \right) V_c + \zeta_c V_t \right\} \right] - \nu_{2p} \left((-\Delta)^p - 2^p \right) \zeta_c, \quad (2) \\ \frac{\partial D_c}{\partial t} = & \frac{1}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \left(\frac{f}{Ro_a} + \zeta_t \right) V_c + \zeta_c V_t \right\} - (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \left(\frac{f}{Ro_a} + \zeta_t \right) U_c + \zeta_c U_t \right\} \right] \end{aligned}$$

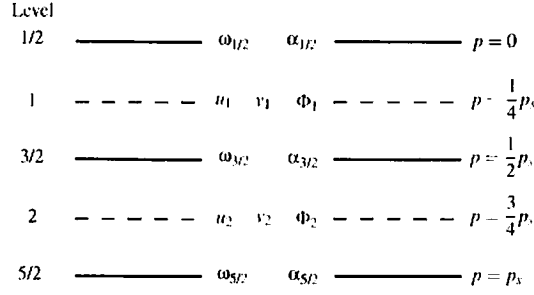


図 1: 鉛直方向の変数の配置.

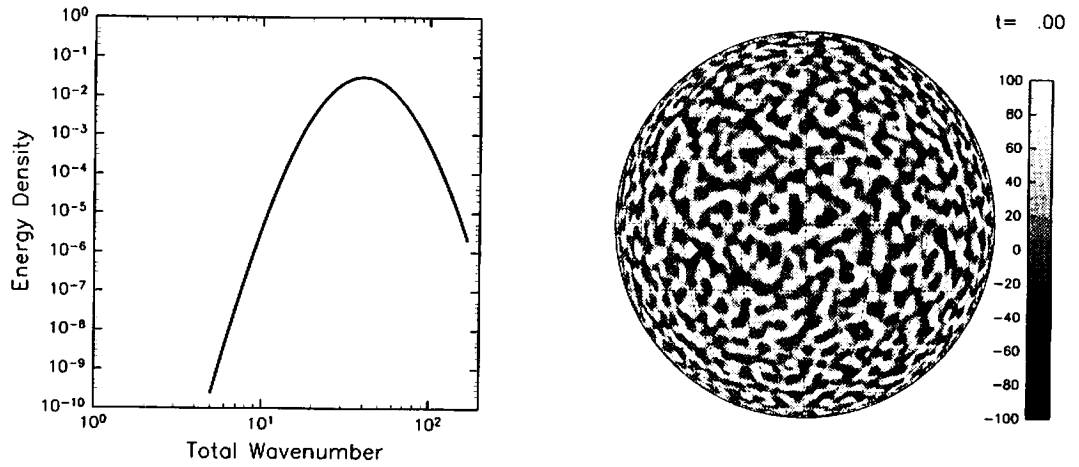


図 2: $n_0 = 40$, $\gamma = 40$ とした時の初期のエネルギー分布 (左図) と初期場 (右図).

$$-\Delta_H \left(\frac{\Phi'_c}{\text{Fr}^2} + \frac{U_t U_c + V_t V_c}{1 - \mu^2} \right) - \nu_{2p} \left((-\Delta)^p - 2^p \right) D_c, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi'_c}{\partial t} = -\frac{1}{1 - \mu^2} \left[\frac{\partial (U_t \Phi'_c)}{\partial \lambda} + (1 - \mu^2) \frac{\partial (V_t \Phi'_c)}{\partial \mu} \right] + \frac{D_c \Phi'_c}{\gamma} - D_c - \nu_{2p} \left((-\Delta)^p - 2^p \right) \Phi'_c, \quad (4)$$

レベル 1, 2 で定義されている各変数 A について $A_t = (A_1 + A_2)/2$, $A_c = (A_1 - A_2)/2$ としており、それぞれが順圧モード、傾圧モードを表している。この系は Rossby 数 $\text{Ro}_a \equiv \bar{U}/2\Omega a$ と Froude 数 $\text{Fr} \equiv \bar{U}/\sqrt{gH}$ の 2 つのパラメータによって特徴付けられる。また、Lamb パラメータ $\epsilon = (2\Omega a)^2/gH$ は $\epsilon = (\text{Fr}/\text{Ro}_a)^2$ と表せる。ただし、 H は基本場の成層度によって決まる量であり、成層が強くなるほどその値は大きくなる。水平方向には各変数を球面調和関数に展開した。本研究では、初期に傾圧渦度場のみを持つ状態を運動エネルギーの全波数 n に対する依存性が

$$E(n, t = 0) = E_0 \frac{n^{\gamma/2}}{(n + n_0)^\gamma}, \quad (5)$$

となるように与え、様々な ϵ , Ro_a について $t = 15$ まで時間積分した。(5) 式中のパラメータは、 n_0 がエネルギースペクトルのピークを与え、 γ がスペクトルの広がりの特徴付けていて、 γ が大きい程スペクトル幅が狭くなる。本研究における一連の数値実験においては、 $n_0 = 40$, $\gamma = 40$ とした。このようにして与えた初期のエネルギースペクトルと傾圧渦度場は、図 2 のようになっている。

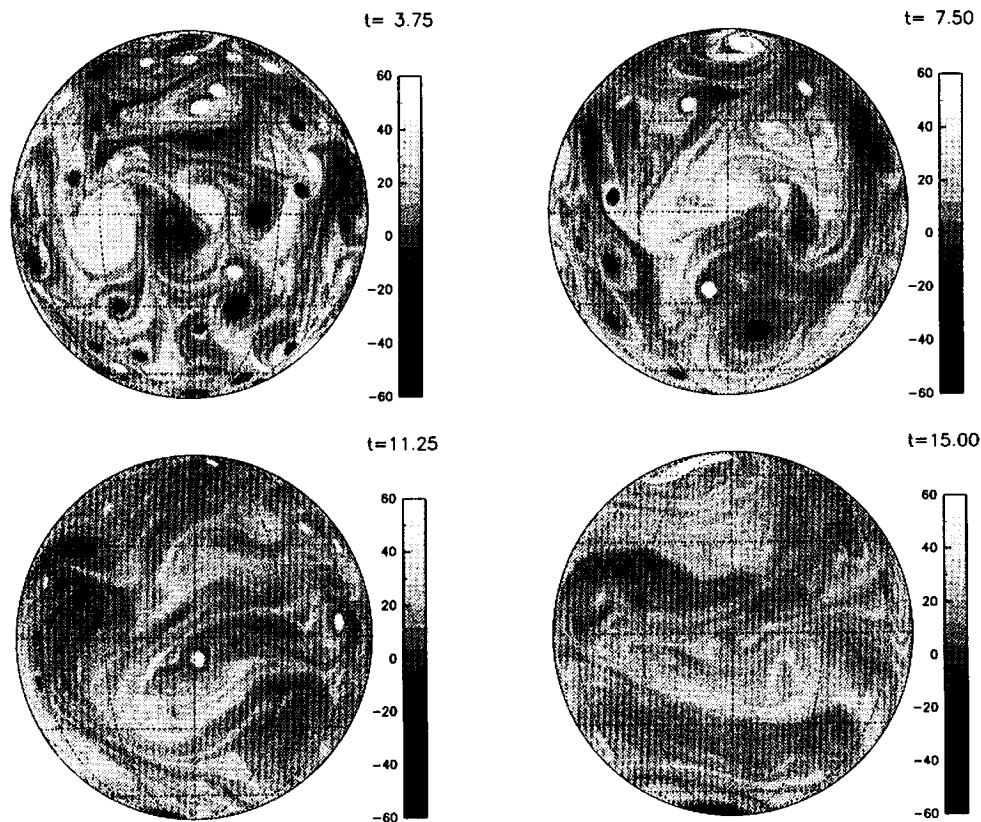


図3: Case 1における上層の渦度場の時間発展. いずれも赤道中心の正射図法で描かれている.

3 結果

以下では, $\{\epsilon, Ro_a\} = \{1, 4.0 \times 10^{-2}\}$ (以下, Case 1 と表記), $\{1000, 1.25 \times 10^{-3}\}$ (Case 2), $\{1000, 1.0 \times 10^{-2}\}$ (Case 3) の3つのケースについて数値実験を行った結果を示す.

3.1 時間発展場の構造

a. Case 1

Case 1 は Lamb パラメーターが小さく, 回転の効果が弱い場合に相当する. この場合に得られた場は渦度場以外は弱く, 上層と下層の渦がほとんど独立して時間発展し, 段々, 各層で孤立渦が形成された. このことは, 上層と下層のそれぞれで流体が2次元非発散の運動をすると見なしうることを意味している. 上層の渦度場の時間発展を図3に示したが, ここから時間とともに同符号の渦が合体を繰り返すことによって, 孤立渦の数が少なくなるとともにそのスケールも大きくなっていることが見てとれる. このような性質は2次元非発散流体の減衰性乱流で見られているもの (McWilliams, 1984) に類似している. また, 最終的には (図3右下) 正負1つずつの渦が極域に残ることが分かった. つまり, 正(負)の渦度が北極(南極)付近に存在している状態が実現された. このことは, 渦の空間スケールが時間とともに大きくなった結果, 弱いながらも回転の影響を受けることで北(南)半球で正(負)の渦度を持つ渦が極向きに運動したためだと思われる.

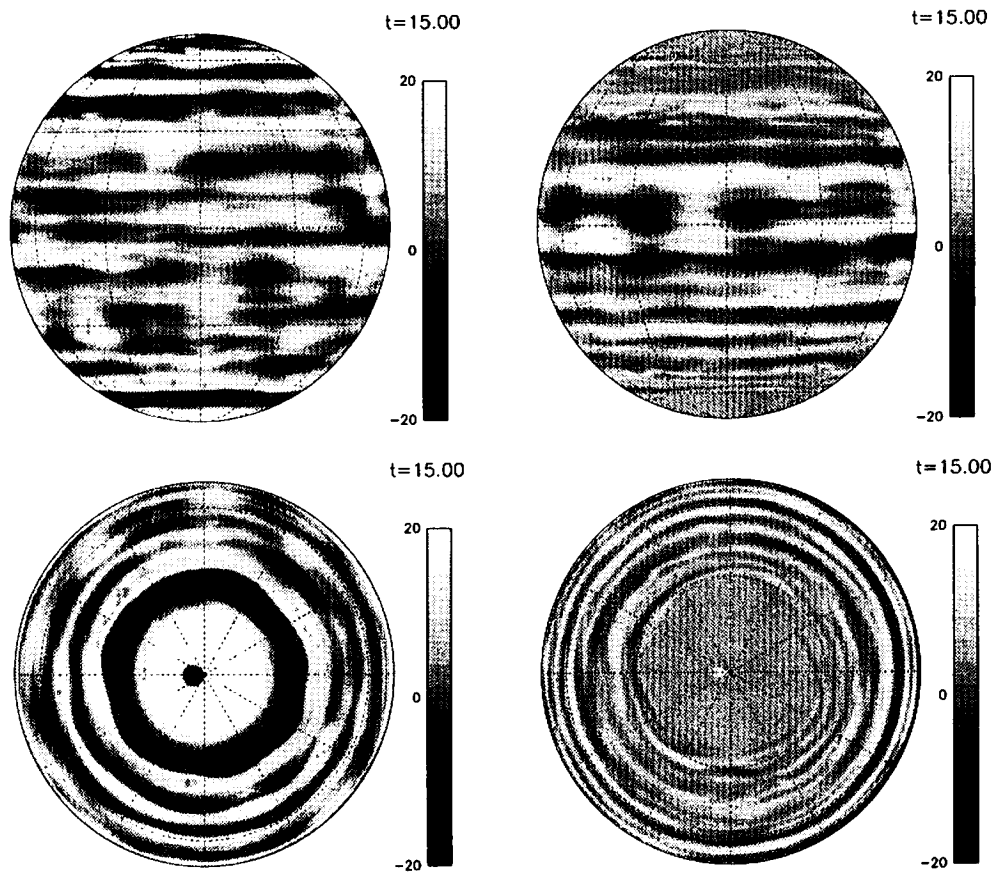


図 4: Case 2 における順圧渦度場 (左側), 傾圧渦度場 (右側) の $t = 15$ におけるスナップショット. 上段が赤道中心, 下段が南極中心としたものである.

図には示していないが, 下層の渦度場も同様の時間発展をし, 最終的には正 (負) の渦度が北極 (南極) 付近に存在している. ただし, このような最終状態においても各層の渦の位置が一致することはなく, 順圧的な構造が卓越するようなことはない.

b. Case 2

Case 2 では Lamb パラメーターが大きく, 回転の効果が強くなり, 順圧モードと傾圧モードとで異なった構造が見られた. 図 4 は $t = 15$ における順圧モード, 傾圧モードの渦度場である. 水平発散, ジオポテンシャルの傾圧成分は渦度場に比べて振幅が遥かに小さかったので図には示していない. 図 4 から, 順圧モード, 傾圧モードのいずれも東西の帯状構造をなしていることが分かる. さらに, 極域においては順圧の西向き周極渦が卓越している. 順圧場に関しては, このような東西の帯状構造と西向き周極渦は 2 次元非発散流体における回転の強い場合 (Yoden and Yamada, 1993) でも同様に見られ, このことから順圧モードと傾圧モードの相互作用が存在する場合でも, 特徴的な場を見る限りでは 2 次元非発散の場合と比べて著しい構造の変化が生じることはないと思われる.

傾圧モードについて見ると, 振幅は赤道域に集中していて, 中高緯度では振幅はほとんどないことが分かる. また, 図 4 からは見て取ることはできないが, 傾圧渦度場は高緯度では, 北極 (南極) から見た時に反時計回り (時計回り) の螺旋構造となっている. Lamb パラメーターの大きい時の浅水方程式系においては, Rossby 波の経度方向の位相速度の緯度依存性から極域において螺旋構造が生

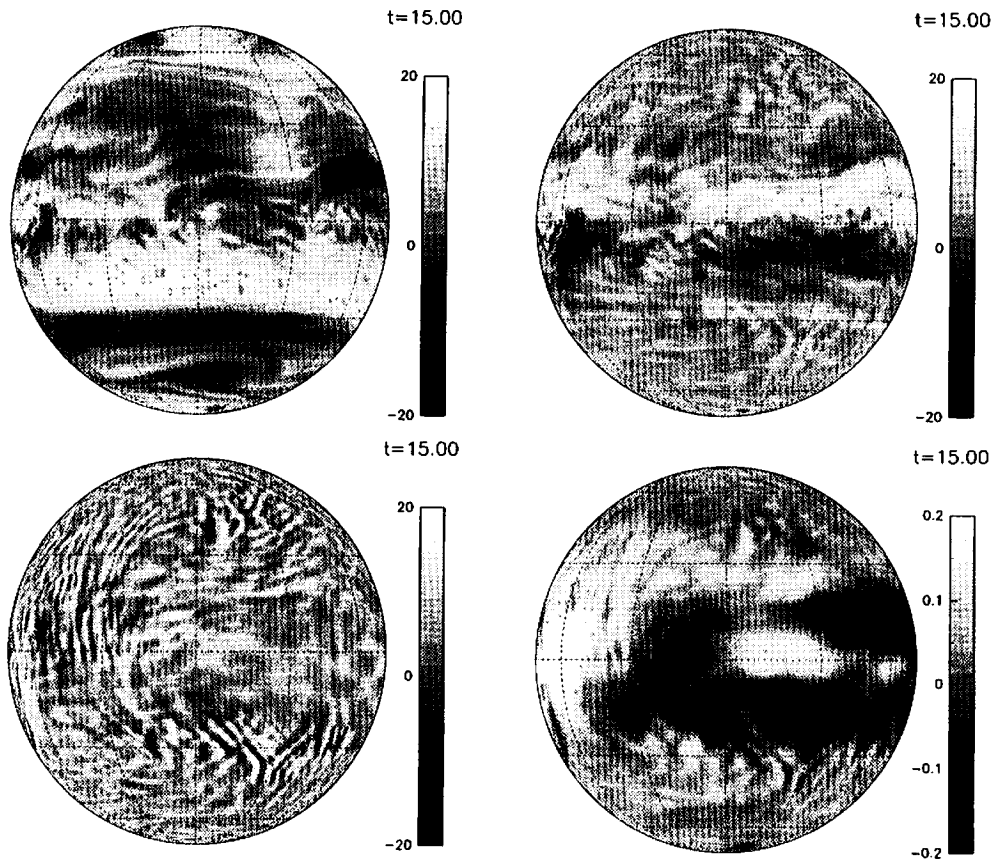


図 5: Case 3 における順圧渦度場 (左上), 傾圧渦度場 (右上), 発散場 (左下), ジオポテンシャルの傾圧成分 (右下) の $t = 15$ におけるスナップショット.

じる (北村, 松田, 1999) が, 螺旋の向きは今の結果と逆である. 従って, Case 2 で見られる傾圧渦度場の螺旋構造は Rossby 波の位相速度の緯度依存性よりも順圧西向き周極渦による移流が効いていることで形成されるものであると考えられる.

c. Case 3

Case 3 は Case 2 と Lamb パラメターの値は同一であるが, Rossby 数が Case 2 の 8 倍になっている. 図 5 に $t = 15$ における各変数のスナップショットを示した. Case 2 の結果と比較すると, 渦度の東西帯状構造の南北スケールが大きくなっている点や, 順圧の周極渦が卓越していない点が異なっている. しかし, 最も顕著な違いは発散場やジオポテンシャルの傾圧成分の振幅が無視できないことである. ジオポテンシャルについては傾圧渦度場と同様, 赤道で大きな振幅を持っているが, 東西一様ではない. 一方, 発散場は渦度場と比較すると高波数のモードが卓越していて, 傾圧渦度場のように赤道にトラップされることはない. また, 時間発展を見ると, 発散場は渦度場よりも遥かに短い時間スケールで変動していることが分かった.

3.2 東西流の帯状平均

Case 2, 3 においては東西の帯状構造が卓越しているため, ここで東西流の帯状平均を比較してみることにする. 図 6 は, Case 2, 3 における平均東西流の順圧成分 (中央), 傾圧成分 (右) を示した

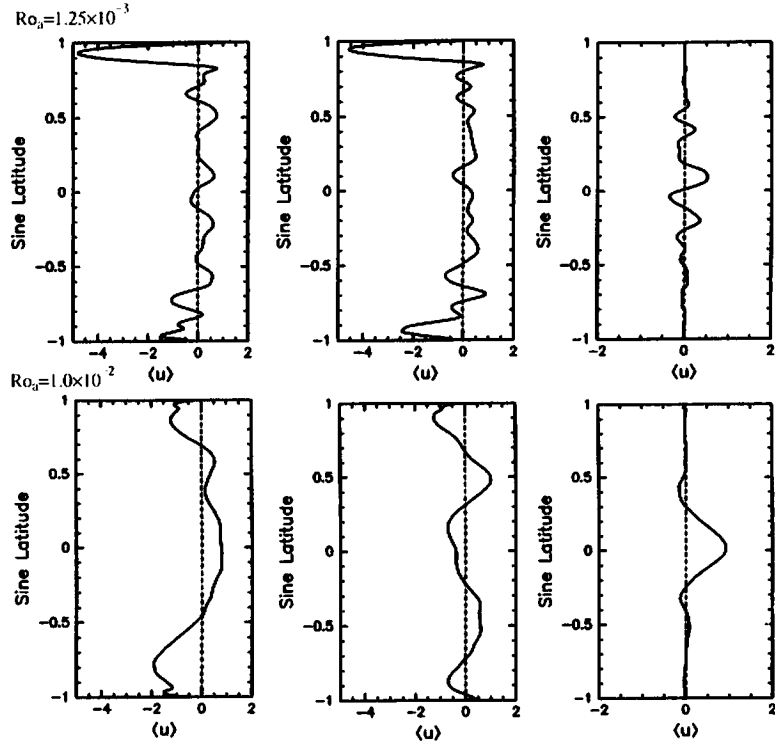


図 6: $t = 15$ における東西流の帯状平均. Case 2(上段)と Case 3(下段)について示してあり, 中央が順圧モード, 右側が傾圧モードである. 左側には同じ Rossby 数に対して行われた 2次元非発散の数値実験の結果が描かれている.

ものである. また比較のために, 2次元非発散順圧渦度方程式を用いて同じ Rossby 数について数値実験をした場合に得られた平均東西流を図 6 左に示した. 2層モデルの順圧成分と 2次元非発散の系とを比べると, 東西ジェットのスケーラや, Case 2において得られた周極渦のピークを持つ緯度がよく一致していることが分かる. 2層モデルでの順圧成分は傾圧モードとの相互作用が存在しているのにもかかわらず, 最終的に得られる平均東西流の分布は 2次元非発散の系と同様, Rhines スケールによって特徴付けられ, 大きな構造上の相違は生じないと言える.

一方傾圧成分については, Lamb パラメターの大きな時には振幅が赤道域に集中することに対応して, 平均東西流も赤道域で大きくなっている. 特に Case 3 の場合には, 赤道域で東向き成分が卓越している. この東向き成分がどのようにして形成されるのかはよく分からないが, 少なくとも順圧成分と同様に考えることはできないだろうと思われる.

3.3 エネルギー分布

無次元化した方程式系 (1)-(4) におけるエネルギーは, スペクトル空間において以下のように書くことができる:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \mathcal{K}_{\zeta_i} + \mathcal{K}_{\zeta_e} + \mathcal{K}_{D_e} + \mathcal{A}, \\ \mathcal{K}_{\zeta_i} &\equiv \sum_{n=1}^M \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n(n+1)} |\zeta_i^{nm}|^2, \quad \mathcal{K}_{\zeta_e} \equiv \sum_{n=1}^M \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n(n+1)} |\zeta_e^{nm}|^2, \end{aligned} \quad (6)$$

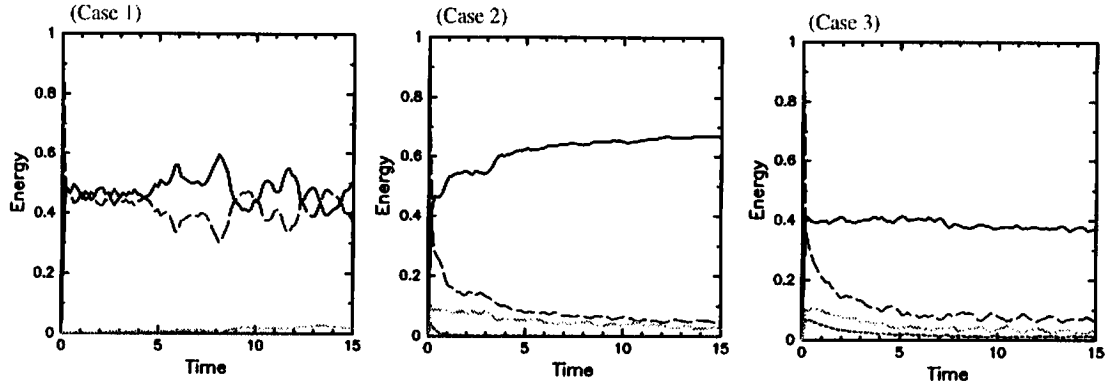


図7: 各ケースにおける全球積分したエネルギーの時間変化. 実線: 順圧モードの運動エネルギー, 破線: 傾圧モードの渦度場の運動エネルギー, 点線: 傾圧モードの発散場の運動エネルギー, 一点鎖線: 有効位置エネルギーである.

$$\mathcal{K}_{D_c} \equiv \sum_{n=1}^M \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2n(n+1)} |D_c^{nm}|^2, \quad \mathcal{A} \equiv \sum_{n=0}^M \sum_{m=-n}^n \frac{1}{2F_1^2} |\Phi_c^{nm}|^2.$$

ここで, \mathcal{K}_ζ , \mathcal{K}_{ζ_c} , \mathcal{K}_{D_c} , \mathcal{A} はそれぞれ, 順圧モードの運動エネルギー, 傾圧モードの渦度場の運動エネルギー, 発散場の運動エネルギー, 有効位置エネルギーに対応する.

図7は, それぞれのケースにおけるエネルギーの時間変化である. Case 1 では, 場の時間発展が上層と下層においてそれぞれ独立して運動していることに対応して, 傾圧モードから順圧モードへのエネルギー輸送が一方的には起こらない. 一方, Case 2, 3 においては最終的な場としては順圧モードが卓越したわけだが, エネルギーの時間変化はかなり様子が異なる. Case 2 では傾圧モードから順圧モードへのエネルギー輸送が $t = 5$ 程度まで明瞭に現れているのに対し, Case 3 では初期の段階で順圧モードにエネルギーが輸送された後は, 順圧モードへのエネルギー輸送は明瞭には現れず, 傾圧モードのエネルギーが散逸することで, 結果的に順圧モードが残るような形になっている. すなわち, 変形半径が同一でも (Lamb パラメーターと変形半径は一対一に対応する), エネルギー輸送のされ方は大きく異なり, 各水平スケールにどのモードのエネルギーがどの程度存在するかにかなり依存するものと考えられる.

このような特徴は, エネルギースペクトルの分布 (図8) にも現れている. Case 1 では順圧, 傾圧モードの渦度場がほとんど同じ分布をしているのに対し, Case 2, 3 では低波数側で順圧モードの渦度場が傾圧モードの渦度場より卓越していることが分かる. 順圧モードのスペクトルのピークは Rhines スケールに対応するものと考えられるが, 傾圧モードの渦度場については同様のスペクトルピークは見られず, Case 2 ではそれよりも高波数にピークが現れている. さらに顕著な違いが現れているのが発散場のエネルギースペクトルであり, Case 2 においては渦度場と比べて無視できる程小さいのに対し, Case 3 では, エネルギースペクトルの傾きが渦度場のそれよりも緩くなっていて, $n > 40$ の領域では渦度場より発散場の方にエネルギーが多く存在していることが分かる.

Case 2 で得られたエネルギースペクトルには, Salmon(1978) によって得られた準地衡風近似のもとでの2層乱流でのエネルギースペクトルとの類似性が見られるように思われるが, これが準地衡風近似の場合と同様のメカニズムで得られたものかどうかはエネルギースペクトルだけでは判断できず, 少なくとも, エネルギー方程式から議論すべき問題である. 準地衡風近似の場合, 変形半径のスケールで傾圧モードから順圧モードへのエネルギー輸送がなされると考えられてい

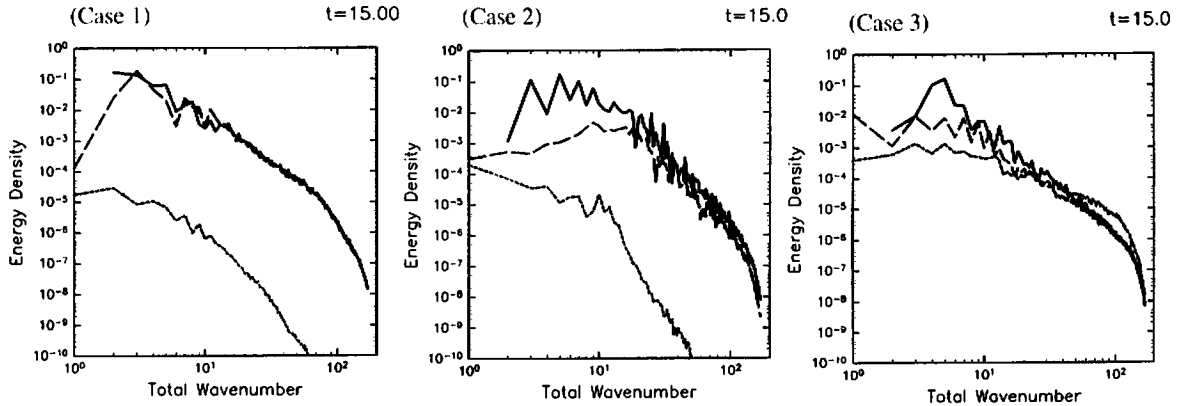


図 8: 各ケースにおける $t = 15$ におけるエネルギースペクトル. 実線: 順圧モードの運動エネルギー, 破線: 傾圧モードの渦度場の運動エネルギー, 点線: 傾圧モードの発散場の運動エネルギーである.

るが, 球面の場合には変形半径の緯度依存性があるため, このことの妥当性を調べるのは容易ではないように思われる. また, Case 3 のように Rossby 数がある程度の大きさを持つ場合は, 準地衡風近似のもとで得られている結果は適用できないことが分かる.

4 まとめ

球面上の 2 層モデルによる減衰性乱流の数値実験を異なる無次元パラメータ ϵ , Ro_a について行い, 結果の比較を行うことで以下のような知見が得られた:

- $\epsilon = 1$ の場合には上層と下層とでほとんど独立した水平 2 次元的な運動をする. $\epsilon = 1000$ の時には, 順圧モードが卓越し, 傾圧モードは赤道域に振幅が集中する.
- $\epsilon = 1000$ の時に得られた東西帯状流は, 順圧モードについては 2 次元非発散の場合に得られる分布とよく対応する. 傾圧モードは, Rossby 数がある程度の大きさになると赤道で東向き成分を持つようになる.
- $\epsilon = 1$ ではほとんどのエネルギーが渦度場のエネルギーで, 順圧と傾圧のエネルギースペクトルもほとんど一致している. 一方, $\epsilon = 1000$ の場合には, 低波数側で順圧場のエネルギーが卓越している. また, Rossby 数の大きさの違いによって, 特に傾圧モードに関してエネルギースペクトルに顕著な違いが見られた.

順圧モードの振る舞いに関しては, 2 次元非発散渦度方程式によって得られている結果から大きく食い違うことがないことが明らかとなった. 一方, 準地衡風近似のもとでの 2 層乱流の知見がどの程度適用できるのかは, 特にエネルギー輸送の見地から議論する上で興味深い. そのためには, 変形半径の緯度依存性を考慮した上で, エネルギー輸送についてさらに詳細な解析が必要と思われる.

参考文献

- [1] Cho, J. Y.-K., and Polvani L. M.: The emergence of jets and vortices in freely evolving, shallow-water turbulence on a sphere, *Phys. Fluid*, **8**, 1531 (1996).
- [2] McWilliams, J. C.: The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, **146**, 21(1984).
- [3] Salmon, R.: Two-layer quasi-geostrophic turbulence in a simple special case, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **10**, 25 (1978).
- [4] Williams, G. P.: Planetary circulations: 1. Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence, *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1399 (1978).
- [5] Yoden, S., and Yamada, M.: A numerical experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere, *J. Atmos. Sci.*, **50**, 631 (1993).
- [6] 北村 祐二, 松田 佳久: 回転球面上における発散性乱流, 数理解析研究所講究録 1092, 68 (1999)