浅水系におけるバランスした渦流からの重力波放射

京都大学大学院理学研究科　杉本 憲彦 (Norihiko Sugimoto)
京都大学大学院理学研究科　余田 成男 (Shigeo Yoden)
京都大学大学院理学研究科　石岡 圭一 (Keiichi Ishioka)

概要

強制散逸のある f 平面浅水系において, 渦流の非定常運動に伴って放射される重力波を数値的に調べた. 古典的な地衡流調節問題と異なり, 準地衡近似が妥当なパラメータ領域であっても, 重力波はバランスしている渦流領域から連続的に放射された. これらの重力波放射について, 空力音理論の類推によりソース項を導出し, 近傍場は非発散の仮定から, 遠方場はスケール解析から, それぞれ異なる近似を得た.

1. はじめに

地球大気の大規模運動では, 気圧傾度力とコリオリ力の釣り合った地衡流関係が第１近似的に成り立っている (Lorenz, 1980). 気象学では, これらの大規模運動を近似的に記述するため, 複雑な方程式系をこの平衡関係を使って簡略化した様々な**バランスモデル**を用いてきた (Gent and McWilliams, 1983). これらのバランスモデルでは, **非平衡成分である重力波モード**を除去でき, **平衡成分である渦モード**のみを予報的に時間発展できる. そして, 他の物理量は**バランス条件**を用いて, 平衡成分 (ポテンシャル渦度) の逆問題から得ることができる (McIntyre and Norton, 2000). この簡略化により, より小さい位相空間で複雑な現実大気を扱えることができるのみならず, 流体力学の本質的問題である非線形移流問題を, ポテンシャル渦度の移流というもっとも単純な形で扱えることが可能になる (Ford et al., 2000). これらの背景から, 回転・成層流体を扱う気象力学や海洋力学の渦流運動 (順圧不安定, ロスビー波等) の理論的知識はすべて, この**バランス力学**の概念を基礎に組み立てられてきた. しかしながら一方で, この概念の正当化は観測的証拠やスケール解析によってしかなされず, なぜバランスするのか, しなければならないのか, についての理論的根拠はない. それゆえ, このバランス力学の妥当性を解明することは地球流体力学の重要な課題の１つである. 著者らのグループは以上の問題意識のもと, これまで平衡成分と非平衡成分の存在するもっとも簡略化した f 平面浅水系を用いて, この概念の妥当性をバランスしたジェット流の線形安定性解析によって調べてきた (杉本・余田, 2002; Sugimoto and Yoden, 2003).

一方, 外部衝撃によって生じた非平衡状態が, 平衡状態に落ち着く過程で重力波を放出する地衡流調節問題は, 初期の応答過程や, 最終的な平衡定常解について, 初期値問題として数多くなされてきた (Rossby, 1938; Gill, 1982). しかし, 現実大気を意識した, 強制を継続的に受ける, 時間に対して非定常な地衡流調節過程に関する研究は未だない. また, 大気大循環モデルによる数値実験や観測による研究では, 極夜ジェットからの重力波放射の可能性が報告 (Yoshiki and Sato, 2000) されているが, その放射メカニズムは理解されていない.

以上の背景をふまえ, 本研究では強制散逸のある f 平面浅水系を用いて, ジェット流の非定常運動を通して継続的に放射される重力波を調べた.

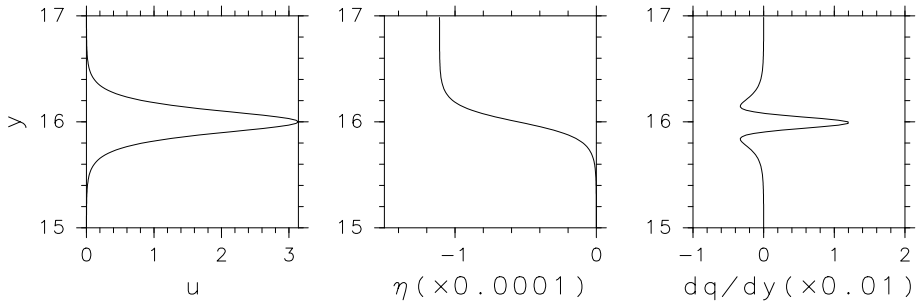

図 1: 基本場の緯度構造 ($Ro = 10$, $Fr = 0.3$):(左) 帯状流 $\overline{u}(y)$, (中) 水面変位 $\overline{\eta}(y)$, (右) 渦度の緯度微分 $d\overline{q}(y)/dy$.

2. 枠組み

2.1 基本場

領域は東西方向 (x) に 2π, 南北方向 (y) に 64π の 2 重周期境界をもつ矩形領域をとる. 基本場のジェットの速度 $\overline{u}(y)$ と, これと地衡流平衡した水面変位 $\overline{\eta}(y)$ の南北構造を次で与える (Hartmann, 1983):

$$\overline{u}(y) = u_0 \mathrm{sech}\left\{\frac{2(y-y_0)}{B}\right\}, \tag{1}$$

$$\overline{\eta}(y) = -\frac{fBu_0}{g}\arctan\left\{\exp\left(\frac{2(y-y_0)}{B}\right)\right\}. \tag{2}$$

ここで, u_0, y_0, B はそれぞれ, ジェットの強さ, 中心位置, 幅を与えるパラメータであり, f, g はそれぞれ, コリオリパラメータ, 重力加速度である. これらと平均水深 H_0 を使って, ジェットの無次元化パラメータを $Ro = u_0/(fB), Fr = u_0/\sqrt{gH_0}$ で定義した. 図 1 に, 基本場のジェットの南北構造の一例 ($Ro = 10, Fr = 0.3$) を示す (領域 $15\pi \sim 17\pi$). $d\overline{q}(y)/dy$ が符号を変え, 順圧不安定の必要条件を満たすジェットである (Rayleigh, 1880).

2.2 非線形数値実験の方法

非線形計算は以下の (3)∼(5) の f 平面浅水系のスペクトルモデル (石岡, 2002) を基礎方程式として用いた:

$$Ro_T\frac{\partial q}{\partial t} = -Ro\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x} - Ro\frac{\partial(v\zeta)}{\partial y} - \delta - \underbrace{\alpha Ro_T Ro(q-\overline{q})}_{forcing}, \tag{3}$$

$$Ro_T\frac{\partial \delta}{\partial t} = Ro\frac{\partial(v\zeta)}{\partial x} - Ro\frac{\partial(u\zeta)}{\partial y} + \zeta - \nabla^2(RoE + \frac{Ro}{Fr^2}\Phi), \tag{4}$$

$$Ro_T\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -Ro\frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} - Ro\frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} - \underbrace{\beta Ro_T(\Phi - \overline{\Phi})}_{absorber}. \tag{5}$$

ここで, 従属変数 (q, δ, Φ) はそれぞれ, 渦度, 発散, ジオポテンシャル ($\Phi = gh; h = \eta + H_0$) である. 水平速度 (u, v) は流線関数 ψ と速度ポテンシャル ϕ を渦度 $\zeta = \nabla^2\psi$ と $\delta = \nabla^2\phi$ で定義して, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k} \times \nabla\psi + \nabla\phi$ から求まり, $E = (u^2 + v^2)/2$ である. $Ro_T = 1/fT$ は無次元化時間 T を使って定義した無次元数で, 緩和係数 α, β のかかっている項は不安定なジェットを維持するように働く強制の効果と, ジェット領域で発生した重力波を y 境界で散逸させるスポンジの効果をそれぞれ表す. また $\overline{q}, \overline{\Phi}$ はそれぞれ (1), (2) から計算される基本場である. (3)∼(5) を x 方向切断波数 $K = 84$, y 方向切断波数 $L = 2688$(256×8192 grids) の分解能のもと, 数値粘性を入れて 4 次 Runge-Kutta で時間積分した.

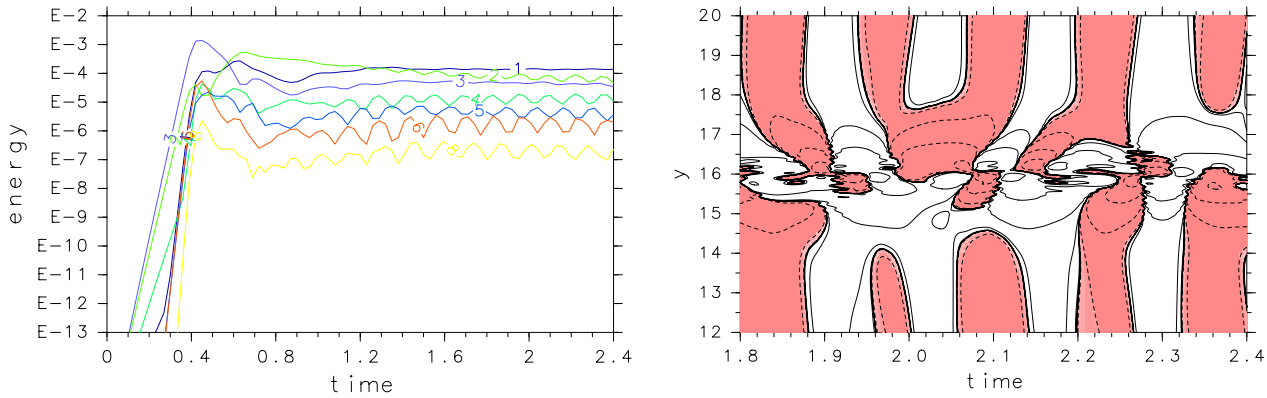

図 2: (左) エネルギーの各波数成分 (1 ∼ 8) の時間変化, (右)$\partial h/\partial t$ の $x=\pi$ における $t-y$ 断面.

3. 結果

$Ro=10, Fr=0.3, \alpha=8$ における時間発展の結果を示す．図 2 はエネルギーの各 x 方向波数成分の時間変化 ($T=0\sim 2.4$) と $x=\pi$ における $\partial h/\partial t$ の $t-y$ 断面図 ($T=1.8\sim 2.4$) である (領域は $12\pi\le y\le 20\pi$)．エネルギーでみると, $T\le 0.4$ では不安定により各波数成分が線形に発達する一方, $T\ge 0.4$ では各波数が相互作用する非線形段階に入っており, 不安定擾乱の発達の効果と強制によるジェットを維持する効果でエネルギーが周期的に変化していることがわかる．一方, 重力波成分のよい指標である $\partial h/\partial t$ でみると, このジェットの周期的な非定常運動に伴って, ジェットの中心領域から位相速度 $\sqrt{gH_0}$ で重力波が放射されているのがわかる．

4. 考察

4.1 重力波ソース

3 節でみられた重力波放射のメカニズムについて, 渦からの音波放射理論 (Lighthill, 1952) の類推によりソース項を導出する．以下の強制散逸系におけるフラックス形の浅水方程式系から始める (Ford, 1994):

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t}+\frac{\partial(huu)}{\partial x}+\frac{\partial(huv)}{\partial y}-fhv+\frac{1}{2}g\frac{\partial h^2}{\partial x}+\alpha h(u-u_0)=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t}+\frac{\partial(hvu)}{\partial x}+\frac{\partial(hvv)}{\partial y}+fhu+\frac{1}{2}g\frac{\partial h^2}{\partial y}+\alpha hv=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial(hu)}{\partial x}+\frac{\partial(hv)}{\partial y}=0. \tag{8}$$

(6), (7) の発散に $\partial/\partial t$ をとったものから, (6), (7) の回転に f かけたものを引く:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2-{c_0}^2\nabla^2\right)\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_j}T_{ij}-F. \tag{9}$$

左辺は慣性重力波の伝播 $c_0=\sqrt{gH_0}$ を表し, 右辺は $T_{ij}-F$ はそのソースを表している．ここで $\epsilon_{12}=\epsilon_{21}=-1, \epsilon_{11}=\epsilon_{22}=0$ として,

$$T_{ij}=\frac{\partial(hu_iu_j)}{\partial t}+\frac{f}{2}(\epsilon_{ik}hu_ju_k+\epsilon_{jk}hu_iu_k)+\frac{g}{2}\frac{\partial}{\partial t}(h-h_0)^2\delta_{ij}, \tag{10}$$

$$F=-\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial h(u-u_0)}{\partial x}+\frac{\partial(hv)}{\partial y}\right)+\alpha f\left(\frac{\partial(hv)}{\partial x}-\frac{\partial h(u-u_0)}{\partial y}\right). \tag{11}$$

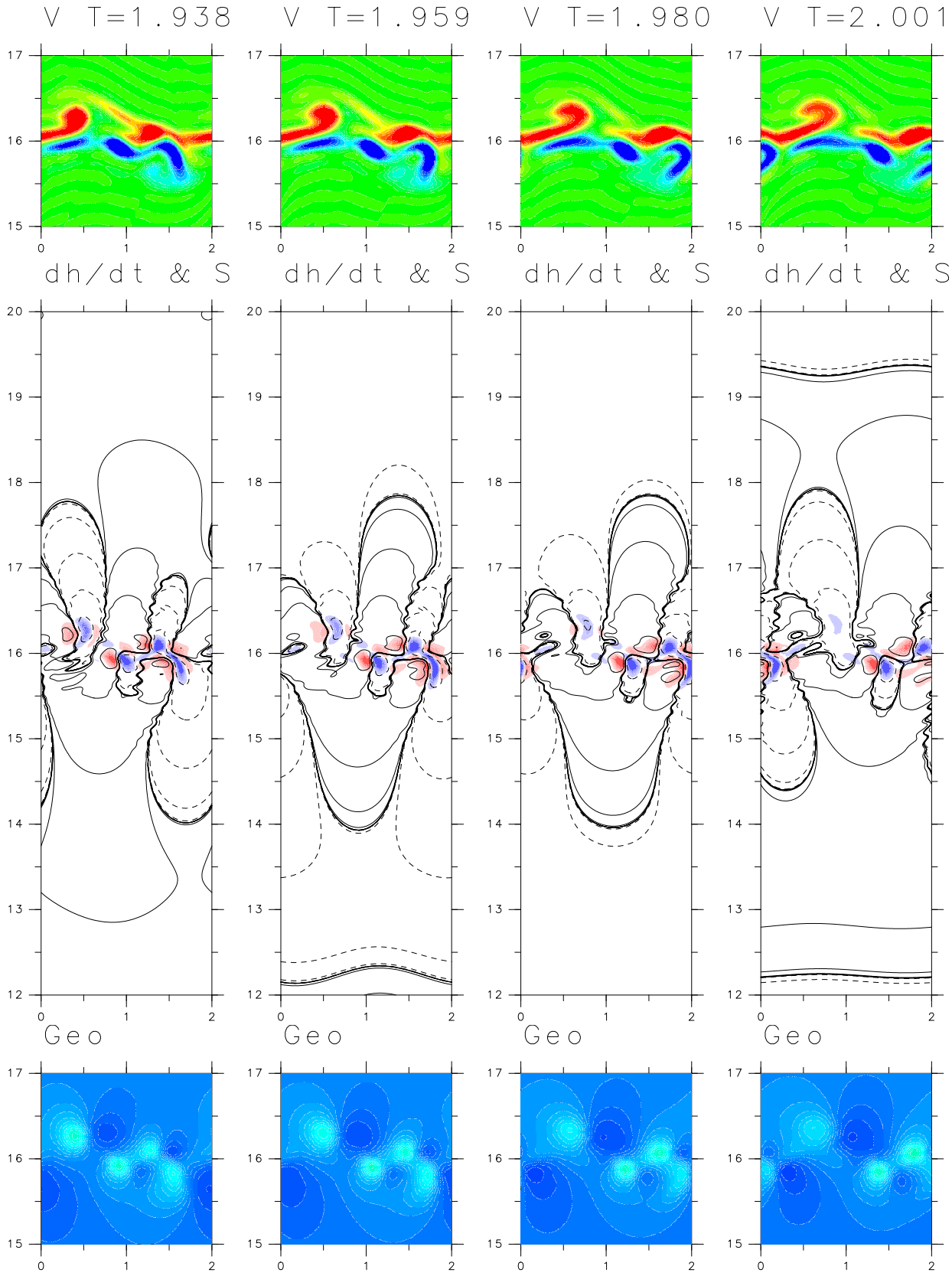

図 3: 渦度 (上段), $\partial h/\partial t$ とソース (中段), ジオポテンシャル (下段) の時間変化: 赤いトーンは正のソース，青いトーンは負のソースを表す.

図 3 は渦度, 右辺のソースとおよび $\partial h/\partial t$, ジオポテンシャル場の時間変化の一例である. $T = 1.938$ に $(x, y) = (0.5, 16.3)$ あたりにある強い渦度領域に強い重力波ソースが存在し, この渦が時間とともに弱まっていくにつれ, ソースも弱くなっていく様子がわかる. この渦運動の強さの時間変化に伴って, ソースの強さが変化することで, 重力波が放射される様子がわかる. 重力波の波数は, ソースの近傍ではソースの波数に依存した波数 2 の構造を持つが, 遠方場では x 方向に帯状な構造を持つ. また, ジオポテンシャル場でみると, ソースの強い領域は水深の浅い領域に対応している. これは, このパラメータでは, 渦度とジオポテンシャル場が旋衡風平衡にあることによる.

4.2 近傍場におけるソースの近似

ジェット近傍の重力波ソースを非発散の仮定のもとに近似する. まず, 強制やコリオリは小さいことおよび, 渦からのソースに着目し, $\partial h/\partial t$ も小さいことを考慮して (9) は以下に近似できる:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} T_{ij} - F \approx \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial (hu^2)}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(2\frac{\partial (huv)}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial (hv^2)}{\partial t}\right) \tag{12}$$

$$= h\frac{\partial}{\partial t} S + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^2 \frac{\partial h}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(2uv\frac{\partial h}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(v^2 \frac{\partial h}{\partial t}\right) \approx h\frac{\partial}{\partial t} S. \tag{13}$$

ここで, S の項は非発散の仮定より, 以下に変形できる:

$$S = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(2uv) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(v^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(2uv) + \frac{\partial}{\partial y}\left(2v\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{14}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-2u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial v}{\partial y} + 2v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-2v\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{15}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(2v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-2v\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{16}$$

よって,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{17}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial y} \tag{18}$$

u, v の時間微分を浅水方程式から書き換え, コリオリ, 強制, h の微分を無視する:

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} \tag{19}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(-u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(-u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y} \tag{20}$$

$$= u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{21}$$

$$\approx u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{22}$$

ここで, この枠組みでは $u \gg v$ であることを考慮し, (21) の第 1 項が第 2 項に比べて大きいことを使った.

図 4 は $T = 1.938$ で複雑な全ソースと (22) の近似の一例である. ジェット近傍にある強い重力波ソースは, 一項のみの近似でよく記述されていることがわかる.

4.3 遠方場におけるソースの近似

(9) で $F = 0$ と近似した場合の解の帯状成分は以下のように表せる:

$$\frac{\partial \overline{h}(y,t)}{\partial t} = \frac{1}{2c}\int_{t_0}^{t} dt' \int_{y_-}^{y_+} dy' J_0\left(f\sqrt{(t-t')^2 - \left(\frac{y-y'}{c}\right)^2}\right)\frac{\partial^2 \overline{T_{22}}(y',t')}{\partial y^2}. \tag{23}$$

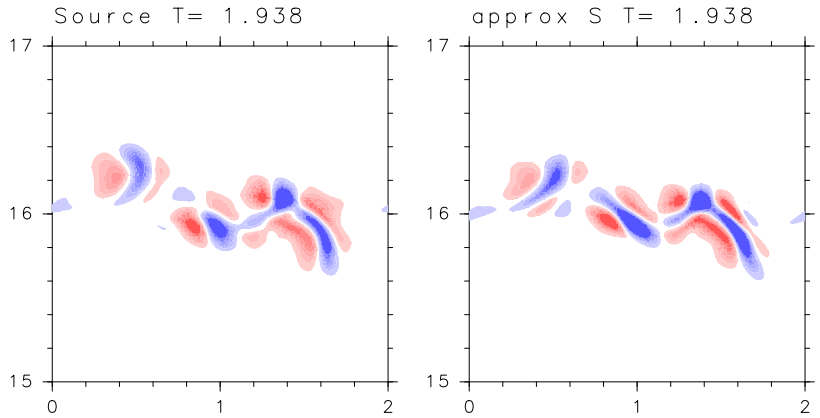

図 4: $T = 1.938$ でのソース (左) とその近似 (右).

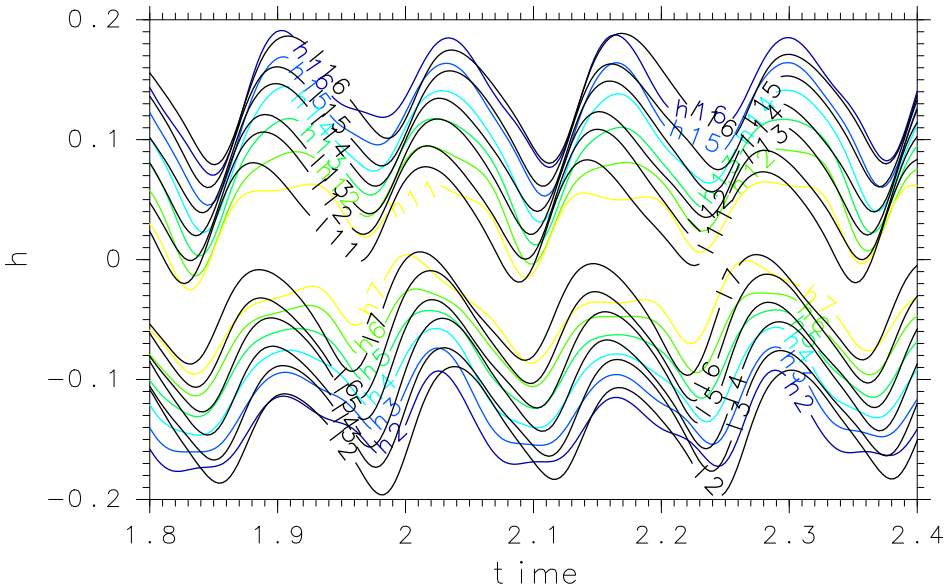

図 5: 各緯度での帯状平均重力波 $\partial\overline{h}/\partial t$(カラー) と近似ソースによる計算 (黒線) の時間変化.

ここで, $y'_{\pm} = y \pm c(t - t')$ であり, $\partial^2\overline{T_{22}}(y', t')/\partial y^2$ は帯状平均したソースである. (23) では高精度の数値計算が困難であったので, ここではさらにソースを y 方向に一回積分して以下に書き換えて計算した.

$$\int_{t_0}^{t} dt' \left[\frac{\partial\overline{T_{22}}(y'_+, t')}{\partial y} - \frac{\partial\overline{T_{22}}(y'_-, t')}{\partial y} \right] + D. \tag{24}$$

ここで D は分散性の効果を表す. 遠方の重力波放射を考える場合は, スケール解析により以下に近似できる:

$$\overline{T_{22}} \approx -2hv\frac{\partial h}{\partial y}. \tag{25}$$

これは水深の緯度変化に関わる量が帯状の重力波を遠方に放射しうることを示す.

図 5 にジェット領域のこの近似項のみで (24) から遠方の重力波を計算した結果を示す. 反射波等の影響はあるが, ジェット領域の近似ソース一項のみで遠方の帯状な重力波が十分に表現されていることがわかる.

5. おわりに

強制散逸のある f 平面浅水系でジェット流の非線形数値実験を行った．その結果, 渦流の非定常運動から重力波が放射された．また, 音波放射理論の類推から重力波ソースを導出し, 渦の強く水深の浅い領域に強いソースが存在することを示した．重力波放射は, 渦流の非定常運動を通してこれらのソースが時間変化する過程でおこることがわかった．さらに, この重力波ソースについて, 近傍場は非発散の仮定から, 遠方場はスケール解析により, それぞれ異なる近似を得た．近傍場の強いソースは非発散な渦流のみでよく記述でき, 遠方の帯状な重力波は, ジェット領域の水深の緯度変化に関わる一項のみで十分表現できることがわかった．

謝辞

数値実験は京都大学大型計算機センター VPP800 を用いておこなった．また, 作図には地球流体電脳ライブラリを用いた．

参考文献

Ford, R., 1994: Gravity wave radiation from vortex trains in rotating shallow water. *J. Fluid Mech.*, **281**, 81-118.

Ford, R., M. E. McIntyre, and W. A. Norton, 2000: Balance and the slow quasimanifold: some explicit results. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 1236–1254.

Gent, P., and J. C. McWillams, 1983: Regimes of validity for balanced models. *Dyn. Atmos. Oceans*, **7**, 167–183.

Gill, A. E., 1982: Adjustment under gravity in a rotating channel. *J. Fluid Mech.*, **80**, 641–671.

Hartmann, D. L., 1983: Barotropic instability of the polar night jet stream. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 817–835.

石岡圭一, 2002: ispack-0.61, http://www.gfd-dennou.org/arch/ispack/, 地球流体電脳倶楽部.

Lighthill, M. J., 1952: On the Sound generated aerodynamically, I. *Proc. Roy. Soc. London*, **211A**, 564–587.

Lorenz, E. N., 1980: Attractor sets and quasi-geostrophic equilibium. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 1685–1699.

McIntyre, M. E., and W. A. Norton, 2000: Potential vorticity inversion on a hemisphere. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 1214–1235.

Rayleigh, J. W. S., 1880: On the stability, or instability of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **11**, 57–70.

Rossby, C. G., 1938: On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems. II. *J. Mar. Res.*, **1**, 239–263.

杉本憲彦, 余田成男, 2002: f 平面浅水系におけるジェット流の不安定擾乱について．京都大学数理解析研究所講究録, **1271**, 51–60.

Sugimoto, N., and S. Yoden, 2003: Balance regimes for the linear stability of a jet in f-plane shallow water system. *Fluid Dyn. Res.* (submitted)

Yoshiki, M., and K. Sato, 2000: A statistical study of gravity waves in the polar regions based on operational radiosonde data. *J. Geophys. Res.*, **105**, 17995–18011.