

応用力学研究所研究集会報告 No.17ME-S2  
「非線形波動および非線形力学系の現象と数理」 (研究代表者 梶原健司)

**Reports of RIAM Symposium No.17ME-S2**  
*Phenomena and Mathematical Theory of Nonlinear Waves and Nonlinear Dynamical Systems*  
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - 12, 2005

Article No. 35

# ウェーブレット級数展開に基づく 数値シミュレーション

山口 貴史 (YAMAGUCHI Takafumi), 近藤 弘一 (KONDO Koichi)

(Received February 3, 2006)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
May, 2006

# ウェーブレット級数展開に基づく数値シミュレーション

同志社大学工学部 山口 貴史 (YAMAGUCHI Takafumi)

近藤 弘一 (KONDO Koichi)

## 概要

発展方程式に対する数値スキームの多くは不連続な波やなめらかではない波に対して不向きである．特異点を含む波形に対する数値スキームが求められる．ある種の窓フーリエ変換であるウェーブレット変換を利用した微分方程式の数値解法として wavelet-Galerkin 法がある．本実験では Wavelet-Galerkin 法に関する実用上の有効性を数値実験により検証する．特に高周波成分を多く含む尖った波に対して実用上有効であるかを検証する．また各種の発展方程式に対して適したウェーブレット基底の選出も行なう．

### 1. ウェーブレット変換

ウェーブレット変換ではスケーリング関数  $\phi(x)$  が重要な役割をはたす． $\phi(x)$  は空間に関して局在する波形であり，区間  $(0, L)$  以外では 0 である． $\text{supp } \phi = (0, L)$  と表記する．また， $\phi(x)$  はトウスケール数列  $\{p_k | k = 0, \dots, L\}$  を用いてトウスケール関係

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^L p_k \phi(2x - k) \quad (1)$$

をみたく， $\phi(x)$  を  $x$  方向に拡大縮小と平行移動させた関数を  $\phi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - k)$  とおく． $\{\phi_{j,k} | k \in \mathbb{Z}\}$  を基底関数として用いる．ある関数  $f(x)$  に対して近似関数を

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{j,k} \phi_{j,k}(x) \quad (2)$$

と定義する．展開係数  $\{s_{j,k}\}$  は近似係数と呼ばれる． $j$  をレベルといい，近似の解像度を表す．レベル  $j$  が大きいほど解像度は粗く， $j$  が小さいほど細かい． $f_j \rightarrow f (j \rightarrow -\infty)$  が成り立つ．近似関数の差を詳細関数といい，

$$g_j(x) = f_{j-1}(x) - f_j(x) \quad (3)$$

と定義する．このとき

$$f_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i, \quad f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j \quad (4)$$

が成立する．ウェーブレット変換では  $\phi(x)$  だけではなく，マザーウェーブレット  $\psi(x)$  も基底関数として用いる． $\psi$  は  $\text{supp } \psi = (0, L)$  であり，もうひとつのトウスケール数列  $\{q_k | k = 0, \dots, L\}$  を用いてトウスケール関係

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^L q_k \phi(2x - k) \quad (5)$$

をみたく， $\psi(x)$  を拡大縮小，および平行移動した関数を  $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$  とおき， $\{\psi_{j,k} | k \in \mathbb{Z}\}$  を基底関数として用いる．詳細関数は

$$g_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (6)$$

と表される． $\{w_{j,k}\}$  を詳細係数と呼ぶ．このとき  $f(x)$  は

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (7)$$

となる．(7) をウェーブレット級数展開と呼ぶ．

$\phi(x), \psi(x)$  が直交ウェーブレットであれば  $\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,i} \rangle = \delta_{k,i}$ ,  $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,i} \rangle = \delta_{k,i}$ ,  $\langle \phi_{j,k}, \psi_{j,i} \rangle = 0$  となる．このとき近似係数  $\{s_{j,k}\}$  と詳細係数  $\{w_{j,k}\}$  は  $s_{j,k} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$ ,  $w_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$  により与えられる． $w_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$  は  $f$  から  $\{w_{j,k}\}$  を得る変換であり離散ウェーブレット変換とも

呼ばれる．逆に  $\{w_{j,k}\}$  から  $f$  を得る逆ウェーブレット変換は (7) となる．また (3) において  $f_j$  から  $f_{j+1}, g_{j+1}$  への変換を分解といい，この逆変換を再構成という． $\{s_{j,k}\}, \{w_{j,k}\}$  についての変換式として表すと，分解アルゴリズム  $\Delta [s_{j+1,k}, w_{j+1,k}] = \text{dwt}(s_{j,k})$  は

$$s_{j+1,k} = \sum_{k=-L}^L p_k s_{j,2i+k}, \quad w_{j+1,k} = \sum_{k=-L}^L q_k s_{j,2i+k} \quad (8)$$

と表され，再構成アルゴリズムは

$$s_{j,k} = \text{idwt}(s_{j+1,k}, w_{j+1,k}) \\ = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_{k-2i} s_{j+1,k} + \sum_{i \in \mathbb{Z}} q_{k-2i} w_{j+1,k} \quad (9)$$

として表される．

主な直交ウェーブレット基底には次のものがある． $N$  次 Daubechies 基底は  $\psi$  の  $N-1$  次までのモーメントが 0 となる基底であり，本論では  $\text{db}N$  と表記する． $N$  次 symlet ( $\text{sym}N$ ) 基底は  $\text{db}N$  と同じ条件で対称性が良いものを選ぶ． $N$  次 coiflet ( $\text{coif}N$ ) 基底は  $\psi$  と  $\phi$  の  $N-1$  次までのモーメントが 0 である．

## 2. スケーリング関数の性質

基底関数  $\phi, \psi$  には様々な性質がある．直交ウェーブレットの場合では  $\{p_k\}, \{q_k\}$  に

$$q_k = (-1)^k p_{L-k} \quad (10)$$

の関係がある．

次にトウスケール関係 (1) に  $x = 0, 1, \dots, L$  を代入する． $\phi(x) = 0$  ( $x \notin \text{supp } \phi$ ) に注意すると，整数点  $\phi(k)$  に関する連立方程式

$$\phi(k) = \sqrt{2} \sum_{l=\max(0, 2k-L+1)}^{\min(L, 2k-1)} p_l \phi(2k-l) \quad (k = 0, \dots, L) \quad (11)$$

が得られる．(11) は同次系であり解が一意に定まらない． $\phi(x)$  の 1 の分解条件

$$\sum_{k=1}^{L-1} \phi(k) = 1$$

を (11) と合わせて用いると解は一意に定まり， $\phi(x)$  の整数点  $\phi(k)$  が求められる． $\phi(x)$  の非整数点  $\phi(2^{-j}l)$  は補間公式

$$\phi(2^{-j}l) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^L p_k \phi(2^{-j+1}l - k) \quad (12)$$

により得られる．ここで (12) は (1) に  $x = 2^{-j}l$  を代入して与えられる． $\psi(x)$  の補間公式は (5) より

$$\psi(2^{-j}l) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^L q_k \phi(2^{-j+1}l - k) \quad (13)$$

と得られる．(13) よりサンプリング点  $\psi(2^{-j}l)$  が求まる．

次に  $\phi$  の導関数  $\phi^{(n)}$  の関係式を導出する．(1) を  $n$  回微分すると

$$\phi^{(n)}(x) = 2^n \sqrt{2} \sum_k p_k \phi^{(n)}(2x - k) \quad (14)$$

となり， $\phi^{(n)}$  に関するトウスケール関係となる．また， $\phi^{(n)}$  は

$$\sum_{k=1}^{L-1} k^n \phi^{(n)}(k) = (-1)^n n! \quad (15)$$

が成り立つ．(14), (15) を合わせて連立方程式を解くと  $\phi^{(n)}(x)$  の整数点  $\phi^{(n)}(k)$  が求められる．さらには補間公式

$$\phi^{(n)}(2^{-j}l) = 2^n \sqrt{2} \sum_{k=0}^L p_k \phi^{(n)}(2^{-j+1}l - k), \\ \psi^{(n)}(2^{-j}l) = 2^n \sqrt{2} \sum_k q_k \phi^{(n)}(2^{-j+1}l - k)$$

よりサンプリング点  $\phi^{(n)}(2^{-j}l), \psi^{(n)}(2^{-j}l)$  が定まる．

## 3. Wavelet-Galerkin 法 ( $\phi$ スキーム)

ウェーブレット級数展開 (7) は (2), (4), (6) より

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{J,k} \phi_{J,k} + \sum_{j=-\infty}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_{j,k} \psi_{j,k}$$

と表される．ここで計算機上で表される最小の解像度を  $J = 0$  とする． $J$  より細かいレベルの詳細係数  $\{w_{j,k}\}$  は無視できるほど十分小さいと仮定して  $w_{j,k} = 0 (j \leq J)$  とおくと

$$f \simeq f_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{0,k} \phi_{0,k} \quad (16)$$

と表される．このとき  $f$  の  $n$  階微分は

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \sum_k s_{0,k} \frac{d^n \phi_{0,k}}{dx^n} = \sum_k s_{0,k} \phi_{0,k}^{(n)}$$

となる．さらに  $\phi_{0,k}^{(n)}$  を級数展開して

$$\phi_{0,k}^{(n)} = \sum_l \lambda_{k,l} \phi_{0,l}$$

とおく． $\phi$  の直交性より  $\{\lambda_{k,l}\}$  は

$$\lambda_{k,l} = \langle \phi_{0,l}, \phi_{0,k}^{(n)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{0,l} \phi_{0,k}^{(n)} dx$$

と与えられる．以上より  $f$  の  $n$  階微分は

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \sum_l \left( \sum_k s_k^{(0)} \lambda_{kl} \right) \phi_{0,l} \quad (17)$$

と表される． $\phi_{0,k}$  は  $k$  が 1 ずれると  $x$  方向に 1 平行移動する．これは刻み幅 1 に相当する．刻み幅  $\Delta x$  で離散化するには

$$f(x) = \sum_i f_i \phi_{0,i} \left( \frac{x}{\Delta x} \right)$$

とおく． $f$  の導関数とその積も同様に

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \sum_i f_i^{(n)} \phi_{0,i} \left( \frac{x}{\Delta x} \right),$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \frac{d^m f(x)}{dx^m} = \sum_i f_i^{(n,m)} \phi_{0,i} \left( \frac{x}{\Delta x} \right)$$

とおく．このとき (17) より

$$f_i^{(n)} = \frac{1}{\Delta x^n} \sum_k a_k^{(n)} f_{i+k}, \quad (18)$$

$$f_i^{(n,m)} = \frac{1}{\Delta x^{n+m}} \sum_k \sum_j b_{k,j}^{(n,m)} f_{i+k} f_{i+j} \quad (19)$$

が成立する．(18), (19) を近似スキームとして用いる．ここで展開係数  $\{a_k^{(n)}\}, \{b_{k,j}^{(n,m)}\}$  は

$$a_k^{(n)} = \langle \phi_{0,0}, \phi_{0,k}^{(n)} \rangle, \quad b_{k,j}^{(n,m)} = \langle \phi_{0,0}, \phi_{0,k}^{(n)} \phi_{0,j}^{(m)} \rangle$$

である．図 1 に coif2 における展開係数を示す．

#### 4. Wavelet-Galerkin 法 ( $\phi\psi$ スキーム)

ウェーブレット級数展開 (16) において 1 回分解すると

$$f_0 = f_1 + g_1 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} s_{1,i} \phi_{1,i} + w_{1,i} \psi_{1,i}$$

となる．ここで  $f(i\Delta x) = f_i \simeq s_{0,i}$  と離散化すると

$$f(x) = \sum_i s_{1,i} \phi_{1,i} \left( \frac{x}{\Delta x} \right) + w_{1,i} \psi_{1,i} \left( \frac{x}{\Delta x} \right) \quad (20)$$

と書ける． $\{s_{1,i}\}, \{w_{1,i}\}$  は分解アルゴリズム (8) を用いて  $[s_{1,i}, w_{1,i}] = \text{dwt}(s_{0,i})$  により与えられる．(20) を  $n$  回微分すると

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{1}{\Delta x^n} \sum_i s_{1,i} \phi_{1,i}^{(n)} \left( \frac{x}{\Delta x} \right) + w_{1,i} \psi_{1,i}^{(n)} \left( \frac{x}{\Delta x} \right)$$

となる．また  $\phi^{(n)}, \psi^{(n)}$  を同様に展開すると,

$$\phi_{1,i}^{(n)} = \sum_k \langle \phi_{1,k}, \phi_{1,i}^{(n)} \rangle \phi_{1,k} + \langle \psi_{1,k}, \phi_{1,i}^{(n)} \rangle \psi_{1,k},$$

$$\psi_{1,i}^{(n)} = \sum_k \langle \phi_{1,k}, \psi_{1,i}^{(n)} \rangle \phi_{1,k} + \langle \psi_{1,k}, \psi_{1,i}^{(n)} \rangle \psi_{1,k}$$

となる．これを代入すると

$$s_{1,i}^{(n)} = \sum_{k=-L}^L \frac{\langle \phi_{0,0}, \phi_{0,k}^{(n)} \rangle s_{i+k} + \langle \phi_{0,0}, \psi_{0,k}^{(n)} \rangle w_{i+k}}{(2\Delta x)^n},$$

$$w_{1,i}^{(n)} = \sum_{k=-L}^L \frac{\langle \psi_{0,0}, \phi_{0,k}^{(n)} \rangle s_{i+k} + \langle \psi_{0,0}, \psi_{0,k}^{(n)} \rangle w_{i+k}}{(2\Delta x)^n} \quad (21)$$

が成り立つ．ただし  $s_{1,i}^{(n)}, w_{1,i}^{(n)}$  は展開式

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \sum_i s_{1,i}^{(n)} \phi_{1,i} \left( \frac{x}{\Delta x} \right) + w_{1,i}^{(n)} \psi_{1,i} \left( \frac{x}{\Delta x} \right)$$

の係数である． $\{s_{1,i}^{(n)}\}, \{w_{1,i}^{(n)}\}$  に対して再構成アルゴリズム (9) を適用すれば  $f^{(n)}(x)$  のサンプリング点が  $f_i^{(n)} = f^{(n)}(i\Delta x) =$

idwt( $s_{1,i}^{(n)}, w_{1,i}^{(n)}$ ) により与えられる．同様にし  
て導関数の積を

$$\frac{d^n f}{dx^n} \frac{d^m f}{dx^m} = \sum_i s_{1,i}^{(n,m)} \phi_{1,i} \left( \frac{x}{\Delta x} \right) + w_{1,i}^{(n,m)} \psi_{1,i} \left( \frac{x}{\Delta x} \right)$$

と展開する．このとき， $s_{1,i}^{(n,m)}, w_{1,i}^{(n,m)}$  は

$$\begin{aligned} s_{1,i}^{(n,m)} &= \frac{1}{\sqrt{2}(2\Delta x)^{n+m}} \\ &\sum_i \sum_j \langle \phi_{0,0}, \phi_{1,i}^{(n)} \phi_{0,j}^{(m)} \rangle s_{i+k} s_{i+j} \\ &\quad + \langle \phi_{0,0}, \phi_{1,i}^{(n)} \psi_{0,j}^{(m)} \rangle s_{i+k} w_{i+j} \\ &\quad + \langle \phi_{0,0}, \psi_{1,i}^{(n)} \phi_{0,j}^{(m)} \rangle w_{i+k} s_{i+j} \\ &\quad + \langle \phi_{0,0}, \psi_{1,i}^{(n)} \psi_{0,j}^{(m)} \rangle w_{i+k} w_{i+j}, \\ w_{1,i}^{(n,m)} &= \frac{1}{\sqrt{2}(2\Delta x)^{n+m}} \\ &\sum_i \sum_j \langle \psi_{1,0}, \phi_{0,i}^{(n)} \phi_{0,j}^{(m)} \rangle s_{i+k} s_{i+j} \\ &\quad + \langle \psi_{1,0}, \phi_{0,i}^{(n)} \psi_{0,j}^{(m)} \rangle s_{i+k} w_{i+j} \\ &\quad + \langle \psi_{1,0}, \psi_{0,i}^{(n)} \phi_{0,j}^{(m)} \rangle w_{i+k} s_{i+j} \\ &\quad + \langle \psi_{1,0}, \psi_{0,i}^{(n)} \psi_{0,j}^{(m)} \rangle w_{i+k} w_{i+j} \end{aligned} \quad (22)$$

である．

## 5. Wavelet-Galerkin 法に基づく発展方程式の数値スキーム

Wavelet-Galerkin 法に基づく発展方程式の数値スキームを示す．1 階線形波動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t) \quad (23)$$

を考える．空間  $x$  のみを離散化し

$$u(x, t) = \sum_j u_j(t) \phi \left( \frac{x}{\Delta x} \right) \quad (24)$$

とおく． $u_j(t)$  は時間のみに依存し，空間に依存するのは  $\phi$  のみである．(24) を (23) に代入し (18) を用いると

$$\frac{du_j(t)}{dt} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-L+1}^{L-1} a_k^{(1)} u_{j+k}(t)$$

となる．時間  $t$  を離散化し  $u_j^{(n)} = u_j(n\Delta t) = u(j\Delta x, n\Delta t)$  とおき，時間微分を前進差分で近似すると数値スキーム

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-L}^L a_k^{(1)} u_{j+k}^n$$

が得られる．同様にして，熱拡散方程式，Burgers 方程式，KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (27)$$

に対する数値スキームはそれぞれ

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta n} = \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{k=-L+1}^{L-1} a_k^{(2)} u_{j+k}^n,$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\nu}{\Delta x^2} \sum_{k=-L+1}^{L-1} a_k^{(2)} u_{j+k}^n$$

$$- \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=-L+1}^{L-1} \sum_{k=-L+1}^{L-1} b_{i,k}^{(0,1)} u_{j+i}^n u_{j+k}^n,$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x^3} \sum_{k=-L+1}^{L-1} a_k^{(3)} u_{j+k}^n$$

$$+ \frac{6}{\Delta x} \sum_{i=-L+1}^{L-1} \sum_{k=-L+1}^{L-1} b_{i,k}^{(0,1)} u_{j+i}^n u_{j+k}^n = 0$$

となる．

## 6. 数値スキームの前処理

数値スキームの前処理として  $\{a_k^{(n)}\}, \{b_{k,j}^{(n,m)}\}$  を数値的に求める．2 つの手順を提案する．  
手順 A (i) トゥースケール数列  $\{p_k\}$  は既知として  $\{q_k\}$  を関係式 (10) より求める．(ii) サンプリング点  $\phi(k)$  を  $\phi(k)$  に関する連立方程式 (11) を解いて求める．ただし倍精度と 4 倍精度を用いる．(iii) サンプリング点  $\phi(2^{-j}k), \psi(2^{-j}k)$

を補間公式 (12), (13) より求める . (iv) サンプルリング点  $\phi^{(n)}(2^{-j}k)$ ,  $\psi(2^{-j}k)$  を各種の差分近似より求める . (v)  $\{a_k^{(n)}\}$ ,  $\{b_{k,j}^{(n,m)}\}$  を数値積分により求める .

手順 B 手順 A の (iii), (iv) の代わりにサンプルリング点  $\phi^{(n)}(k)$  を連立方程式 (14), (15) を解いて求める .

## 7. 数値実験

Wavelet-Galerkin 法が波動方程式に対して有効であるか検証する . 特に高周波成分が含まれる波に対して有効であるか検証する . 各方程式に対して適しているウェーブレットの選定を行なう . 手順 A と B における差を検証する .  $\phi$  のみの展開における数値スキーム (18), (19) を  $\phi$  スキーム ,  $\phi, \psi$  の展開におけるスキーム (21), (22) を  $\phi\psi$  スキームと呼ぶことにする .  $\phi$  スキームと  $\phi\psi$  スキームの差を検証する . CPU は Intel Pentium 4 3GHz を用いる . コンパイラは GNU C++ (Ver. 2.95.4) を用いる . ウェーブレット基底は coif1, ..., coif5 (5 種類), db2, db4, db6, ..., db40 (20 種類), sym2, sym4, sym6, ..., sym34 (17 種類), dmey (1 種類) の計 43 種類を用いる .  $\{a_k^{(1)}\}$ ,  $\{a_k^{(2)}\}$ ,  $\{b_{k,j}^{(n,m)}\}$  に関する数値積分の刻み幅は  $\Delta x' = 2^{-8}$  とする .

## 8. 数値実験 1

関数  $f$  の導関数  $f', f'', f''', ff', ff'', ff'''$  をスキーム (18), (19), (21), (22) を用いて近似する . 三角波, のこぎり波, カーディナルサイン, ガウシアン, サイン波の 5 種類の関数を

用いる . サイン波では刻み幅を  $\Delta x = 2\pi/300$  とし, それ以外では  $\Delta x = 0.1$  とする . 近似の精度を測るため 2 乗平均誤差と最大誤差

$$E_{\text{mean}} = \sqrt{\sum_j (f_j - f(j\Delta x))^2},$$

$$E_{\text{max}} = \max_j |f(j\Delta x) - f_j|$$

を用いる . 数値結果は次の通りである . 表 1 に三角波に対する各数値スキームの誤差を示す . 前処理の手順 A と手順 B を比較すると, 手順 A の方が精度が良い . また手順 A において 4 倍精度を用いると高階導関数の近似精度がさらに良くなる . 手順 A(iv) において中心 4 次差分近似が最も良い .  $\phi$  スキーム,  $\phi\psi$  スキーム共に精度は殆んど同じである . 有限差分法の精度と比較すると, wavelet-Galerkin 法は有限差分法よりも精度が良い . 導関数  $f', f'', f'''$  に対しては sym10 から sym20 と db10 から db20 が良い . 積  $ff', ff'', ff'''$  に関しては coif2 から coif5 が良い .

## 9. 数値実験 2

1 階線形波動方程式 (23) の数値実験を行なう . 保存量

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)^2 dx \simeq \sum_j (u_j^n)^2 \Delta x$$

を用いて精度を測る . 初期波形は数値実験 1 の関数と同じものを用いる . 刻み幅は  $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.0001$  とし, 周期境界条件とする .

表 1: 三角波に対する最大誤差 .

数値スキーム	$f'''$	$ff'$
wG (sym20, A, 倍精度)	$2.7 \times 10^{-8}$	$7.0 \times 10^{-4}$
wG (sym20, B, 倍精度)	4.7	$7.0 \times 10^{-4}$
wG (sym20, A, 4 倍精度)	$2.8 \times 10^{-12}$	$7.0 \times 10^{-4}$
wG (coif5, A, 倍精度)	$6.9 \times 10^{-8}$	$5.3 \times 10^{-9}$
中心 4 次差分	$1.1 \times 10^{-4}$	$9.1 \times 10^{-5}$

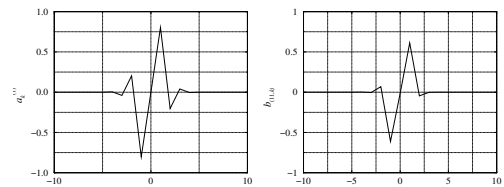
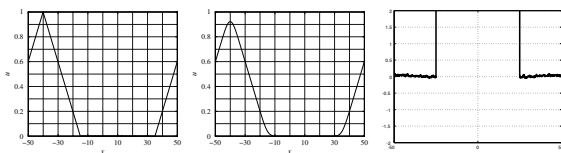


図 1: 展開係数  $\{a_k^{(1)}\}$ ,  $\{b_{11,k}^{(0,1)}\}$  .

数値実験 1 の結果をふまえ前処理には手順 A を用いる．三角波を初期波形とした結果を図 2 に示す．擬スペクトル法では発散する．差分法では波が進むにつれ減衰して先端部分が丸められる．一方 wavelet-Galerkin 法では波形は全く崩れない．手順 A(ii) において 4 倍精度を用いても精度に変化はない． $\phi$  スキームと  $\phi\psi$  スキームとでは精度は殆んど同じである．手順 A(iv) では中心 2 次差分近似が良い．sym2, dmey および高次の基底は使うべきではない．



(a) wavelet (b) 差分法 (c) 擬スペクトル  
図 2: 1 階線形波動方程式の近似波形の変化．

### 10. 数値実験 3

熱拡散方程式 (25) の数値実験を行なう．初期波形はガウシアンとし，刻み幅は  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.0001$  とする．前処理には手順 A を用いる．4 倍精度の前処理では近似精度がわずかに良くなる．また  $\phi\psi$  スキームでも近似精度がわずかに良くなる．Wavelet-Galerkin 法の方が有限差分法よりも精度が良い．使用する基底は coif1, sym2 以外が良い．

### 11. 数値実験 4

線形方程式  $\partial u / \partial t = \nu \partial^m u / \partial x^m$  における wavelet-Galerkin 法

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \nu \sum_k a_k^{(m)} u_{j+k}^n$$

に対する von Neumann の安定性解析を行なう． $u_j^n = g^n \exp(i\omega j)$ ,  $\nu = \Delta t / \Delta x^m$  とおき， $|g| \leq 1$  であれば線形安定である．数値的に安定条件を調べると，全てのウェーブレット基底において安定となる結果を得た．

### 12. 数値実験 5

Burgers 方程式 (26) の数値実験を行なう．初期波形は正弦波とし，刻み幅は  $\Delta x = 1$ ,  $\Delta t =$

0.05 とする．定数  $\nu$  は  $\nu = 0.05, \nu = 0.5, \nu = 1.0$  とおく．前処理には手順 A を用いる．手順 A(iv) では中心 2 次を用いる．基底が db2, db4, dmey の場合は近似波形にギブスノイズが現れる．図 3 に wavelet-Galerkin 法による近似波形を示す．

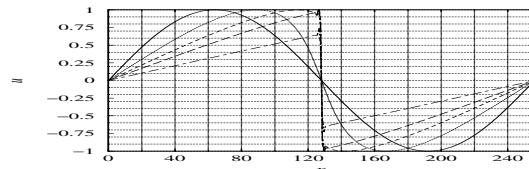


図 3: Burgers 方程式の近似波形の変化．

### 13. 数値実験 6

KdV 方程式 (27) の数値実験を行なう．初期波形はガウシアンとし，刻み幅は  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.05$  とする．周期境界条件をおく．低次の coiflet において空間刻み幅が  $\Delta x = 0.1$  程度のときのみ時間発展し，それ以外の条件では発散する．前処理はいずれの方法でも近似波形に大きな変化はない．

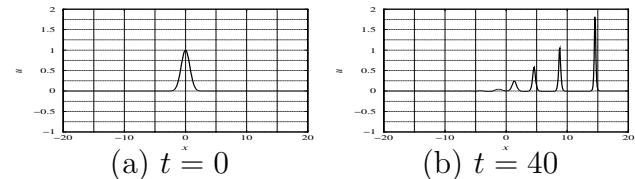


図 4: KdV 方程式の近似波形の変化 (coif1) ．

### 14. まとめ

Wavelet-Galerkin 法は全てのウェーブレット基底でノイマンの意味で線形安定であることを示した．また，数値実験により使用する基底は db2, dmey 以外の基底がよい．特に coif2 から coif5 が良いことを示した．前処理には手順 A を使用すると精度がよくなることも示した．Wavelet-Galerkin 法は有限差分法よりも近似精度が良い．また，スペクトル法では困難であった尖った波に対しても十分な精度をもつ．本論で取扱った発展方程式以外の方程式の場合では，本実験の結果を組み合わせるパラメータの選択をすればよい．以上より本論では wavelet-Galerkin 法の優位性を示し，適切な計算手順を示した．