応用力学研究所研究集会報告 No.17ME-S2
「非線形波動および非線形力学系の現象と数理」（研究代表者　梶原健司）

Reports of RIAM Symposium No.17ME-S2
Phenomena and Mathematical Theory of Nonlinear Waves and Nonlinear Dynamical Systems
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - 12, 2005

Article No. 41

Painlevé およびToda 方程式の解の Hankel determinant formula と補助線形問題

梶原 健司（KAJIWARA Kenji）

（Received February 27, 2006）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
May, 2006

Painlevé および Toda 方程式の解の Hankel determinant formula と補助線形問題

九州大学大学院数理学研究院　梶原 健司　(Kenji Kajiwara)

概要

Painlevé 方程式の有理解に対する Hankel detetermінant formula の要素の母函数が超幾何型特殊函数の対数微分であるという観察から出発し，generic な解の determinant formula の要素の母函数を考察する．その結果，Painlevé 方程式の補助線形問題の解の比が determinant formula の要素と密接に関連することを示す．さらに，その構造が Painlevé 方程式というよりむしろ Toda 方程式の構造に起因することを明らかにする．最後に有限 Toda 方程式の解に関する Nakamura の結果との比較検討を行う．本報告は Sydney 大学の N. Joshi，Manchester 大学の M. Mazzocco 氏との共同研究に基づくものである．

1　はじめに

解の行列式構造は可積分系に特徴的な重要な構造であり，その構造を調べることによって背後のより大きな構造が明らかになる場合が多い．例えば，Painlevé II 方程式 ($\mathrm{P_{II}}$)

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 2u^3 - 4tu + 4\left(\alpha + \frac{1}{2}\right), \tag{1}$$

を考える．パラメータをあらわに書く必要がある場合には $\mathrm{P_{II}}[\alpha]$ と書くことにする．$\mathrm{P_{II}}$ は $\alpha = n + \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$) の場合に有理解を持つが，それは Toda 方程式

$$T_n'' T_n - (T_n')^2 = T_{n+1}T_{n-1} - t\,T_n^2, \quad T_0 = 1,\ T_1 = t, \tag{2}$$

で生成される整数係数の多項式 T_n を用いて

$$u = \frac{d}{dt}\log\frac{T_{n+1}}{T_n}, \tag{3}$$

と表わされる．多項式 T_n は Yablonskii-Vorob'ev 多項式と呼ばれる．すると次にはこの多項式の「正体」を知りたくなるのが人情だが，その一つの解答は Jacobi-Trudi 型の行列式表示 [10, 15] を構成することで得られる．すなわち，次の公式が成り立つ：

$$\begin{gathered} T_n = C_n \begin{vmatrix} p_n & p_{n+1} & \cdots & p_{2n-1} \\ p_{n-2} & p_{n-1} & \cdots & p_{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{-n+2} & \cdots & p_0 & p_1 \end{vmatrix}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k\lambda^k = \mathrm{e}^{t\lambda + \frac{\lambda^3}{3}}, \quad p_n = 0\ (n<0), \quad C_n = \prod_{i=1}^{n}(2i-1)!!. \end{gathered} \tag{4}$$

この公式は T_n が分割 $(n, n-1, \ldots, 1)$ に対応する Schur 函数の特殊化であることを意味する．実際，p_n を $\sum_{k=0}^{\infty} p_k\lambda^k = \exp\sum_{l=1}^{\infty} t_l\lambda^l$ とすれば Schur 函数であり，(modified) KdV 方程式の有理解を与える [11]．このことは $\mathrm{P_{II}}$ が modified KdV 方程式の similarity reduction であることの直接の反映であると考えるのが妥当で

あろう．一方，T_n には Hankel 行列式による表示もある [10]．すなわち，

$$T_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad a_0 = t, \quad a_k = a'_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} a_i a_{k-2-i}, \tag{5}$$

が成り立つ．ではこの公式は一体何を意味するのであろうか．(4) が Schur 函数の特殊化と同定されたのは要素 p_n の母函数の形からである．そこで，この場合にも要素 a_n の母函数を考察するとよさそうである．(5) の漸化式から，母函数は Riccati 方程式を満足する．従って標準的な手続きで線形化ができ，その結果 Airy 方程式が得られる．漸近挙動を考慮して次の結果を得る [4]：

定理 1.1 a_n $(n \geq 0)$ の母函数 $F(x,t)$ を $F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ (-2t)^{-n}$, で定義する．このとき，$t \to \infty$ で以下の漸近展開が $|\arg t| < \frac{\pi}{2}$ の任意のサブセクタで成立する：

$$F(x,t) \sim \frac{\partial}{\partial t} \log \theta(x,t), \quad \theta(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{2t^3}{3}} \mathrm{Ai}(t^2 - x). \tag{6}$$

ただし，Ai は Airy 函数である．

同様に, Painlevé IV 方程式の有理解を特徴づける Okamoto 多項式に対しても同様の考察が行われ, Okamoto 多項式の Hankel 行列式の要素の母函数がやはり Airy 方程式の解である Ai, Bi の対数微分で与えられることがわかっている [1].

このように，有理解の Hankel 行列式表示の要素の母函数が超幾何型特殊函数の対数微分で与えられるという現象は偶然ではないようである．ではこの公式は一体何を意味するのか？背後のどのような構造の反映であるのだろうか．それを見るために， [6] では $\mathrm{P_{II}}$ の generic な解に対する Hankel determinant formula[8] を考察することを試みた．次章ではその結果を報告する．

2 $\mathrm{P_{II}}$ の generic な解に対する Hankel determinant formula

$\mathrm{P_{II}}$ (1) の generic な解に対する Hankel determinant formula は次のように与えられる [8]：

定理 2.1 $\psi_{\pm 1}(t)$ を次の関係式を満たす函数とする．

$$\begin{cases} \dfrac{\psi''_{-1}}{\psi_{-1}} = \dfrac{\psi''_1}{\psi_1} = -2\psi_{-1}\psi_1 + 2t, \\ \psi'_1\psi_{-1} - \psi_1\psi'_{-1} = 2\alpha. \end{cases} \tag{7}$$

また，$n \in \mathbb{Z}$ に対して τ_n を

$$\tau_n = \begin{cases} \det(a_{i+j-2})_{i,j\leq n} & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ \det(b_{i+j-2})_{i,j\leq |n|} & n < 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} a_k = a'_{k-1} + \psi_{-1} \displaystyle\sum_{\substack{i+j=k-2 \\ i,j\geq 0}} a_i a_j, \\ b_k = b'_{k-1} + \psi_1 \displaystyle\sum_{\substack{i+j=k-2 \\ i,j\geq 0}} b_i b_j, \end{cases} \quad a_0 = \psi_1, \quad b_0 = \psi_{-1}, \tag{9}$$

で定義する．このとき，

$$u = \frac{d}{dt} \log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n}, \tag{10}$$

は $\mathrm{P_{II}}[\alpha + n]$ の解である．

注意 2.2 τ_n は Toda 方程式

$$\tau_n'' \tau_n - (\tau_n')^2 = \tau_{n+1}\tau_{n-1} - \psi_{-1}\psi_1\ \tau_n^2, \quad \tau_{-1} = \psi_{-1},\ \tau_0 = 1,\ \tau_1 = \psi_1, \tag{11}$$

を満足する．上の determinant formula は本来 Toda 方程式に対して成立するもので [9]，初期値 $\psi_{\pm 1}$ に条件 (7) を課すことで $\mathrm{P_{II}}$ に対する公式になると理解するのが自然であろう．

さて，要素の母函数を

$$F_\infty(t,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \lambda^{-i}, \quad G_\infty(t,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \lambda^{-i}, \tag{12}$$

で定義すると，漸化式 (9) から F_∞, G_∞ に対する Riccati 方程式が得られ，標準的な手続きで線形化することができるはずである．得られる線形方程式は一体何だろうか．以下に解答を記す：

定理 2.3 (i) $F_\infty(t,\lambda)$ は次の Riccati 方程式を満足する：

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial t} = -\psi_{-1} F^2 + \lambda^2 F - \lambda^2 \psi_1, \tag{13}$$

$$2\lambda \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -(\psi_{-1}' - \lambda\psi_{-1}) F^2 + \left(\frac{\psi_{-1}''}{\psi_{-1}}\lambda + 2 - \lambda^3\right) F + \lambda^2(\psi_1' + \lambda\psi_1). \tag{14}$$

(ii) Riccati 方程式 (13), (14) の解 F に対して Y_1 と Y_2 を次のようにして consistent に導入することができる．

$$F = \frac{\lambda}{\psi_{-1}} \left(\frac{1}{Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial t} + \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{2\lambda}{\psi_{-1}' - \lambda\psi_{-1}} \left[\frac{1}{Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial \lambda} + \frac{1}{4}\left(\frac{\psi_{-1}''}{\psi_{-1}} - \lambda^2\right)\right], \tag{15}$$

$$Y_2 = \frac{1}{\psi_{-1}} \left(\frac{\partial Y_1}{\partial t} + \frac{\lambda Y_1}{2}\right), \qquad F = \lambda\, \frac{Y_2}{Y_1}. \tag{16}$$

(iii) Y_1, Y_2 は次の線形方程式の解である．

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = AY, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = BY, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\psi_{-1}}{2} \\ -\frac{z}{2\psi_{-1}} & 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -\frac{z+t}{2} & -\frac{\psi_{-1}u_{-1}}{2} \\ \frac{zu_{-1}+2\alpha}{\psi_{-1}} & \frac{z+t}{2} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 & \psi_{-1} \\ \frac{z}{\psi_{-1}} & 0 \end{pmatrix}, \quad z = -\psi_{-1}\psi_1. \tag{19}$$

線形方程式 (17)-(19) は $\mathrm{P_{II}}[\alpha - 1]$ の補助線形問題に他ならない [5]．

定理 2.3の証明はほとんど直接計算で行うことができる．Riccati 方程式 (13) は漸化式 (9) より直ちに従う．また，(14) を示すには補助漸化式

$$\frac{d}{dt}(\psi_{-1} a_{k+2} - \psi_{-1}' a_{k+1}) = 2(k+1)\psi_{-1} a_k \quad (k \geq 0),$$

を帰納法で示し，これから $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ と $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}$ を含む線形関係式を導き，それと (13) から $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ を消去すればよい．Riccati 方程式の線形化は (15), (16) を Riccati 方程式に代入すればよい．逆に線形方程式 (17)-(19) で $F=\lambda Y_2/Y_1$ とおいて Riccati 方程式 (13), (14) を得ることもできる．(15) の二つの表式の consistency は得られた線形方程式の両立条件が $\mathrm{P_{II}}[\alpha-1]$ であることから自動的に従う．□

定理 2.3の結果は，$\mathrm{P_{II}}[\alpha-1]$ の補助線形問題の $\lambda=\infty$ 周りの解が母函数 $F_\infty(t,\lambda)$ に対応していることを意味する．ところが補助線形問題は 2 階の方程式であるので，$\lambda=\infty$ 周りにもう一つ独立な解がある．実際 [5] によると，

$$Y^{(1)}=\mathrm{e}^{\frac{\lambda^3}{12}-\frac{\lambda t}{2}}\lambda^{-\alpha}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_{11}^{(1)}\\y_{21}^{(1)}\end{pmatrix}\lambda^{-1}+\cdots\right],\quad Y^{(2)}=\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^3}{12}+\frac{\lambda t}{2}}\lambda^{\alpha}\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_{11}^{(2)}\\y_{21}^{(2)}\end{pmatrix}\lambda^{-1}+\cdots\right],$$

という解があり，$F=\lambda Y_2/Y_1$ であるから Riccati 方程式 (13), (14) は $\lambda=\infty$ 周りで

$$F^{(1)}(t,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i\lambda^{-i},\quad F^{(2)}(t,\lambda)=\lambda^2\sum_{i=0}^{\infty}d_i\lambda^{-i},$$

の形の解を持つことになる．$F^{(1)}$ はもちろん $F_\infty(t,\lambda)$ に他ならない．では $F^{(2)}$ は一体何だろうか．$F^{(2)}$ を (13), (14) に代入し，係数の満たす漸化式を調べることで次の命題を得る．

命題 2.4

$$F^{(2)}(t,\lambda)=\frac{1}{\psi_{-1}}\lambda^2+\frac{\psi'_{-1}}{\psi_{-1}^2}\lambda-\frac{1}{\psi_{-1}^2}\sum_{i=0}^{\infty}d_i(-\lambda)^{-i},\tag{20}$$

とおくと，

$$\frac{\tau_{-n-1}}{\tau_{-1}}=\det(d_{i+j-2})_{1\le i,j\le n}\quad(n>0),\tag{21}$$

が成り立つ．

元々の determinant formula (定理 2.1) は $\tau_0=1$ と規格化した τ 函数の列 $\tau_{-2},\tau_{-1},\tau_0,\tau_1,\tau_2,\ldots$ を考え，各 τ_n を $|n|\times|n|$ 行列式で書く公式であった．ところが命題 2.4では $F^{(2)}$ が $\tau_{-1}=1$ と規格化した τ 函数の列に対する τ_n $(n<-1)$ の determinant formula に対応する母函数であると主張しているわけである．

同様のことは $G_\infty(t,\lambda)$ についても成り立つ．

定理 2.5 (i) $G_\infty(t,\lambda)$ は次の Riccati 方程式を満足する：

$$\lambda\frac{\partial G}{\partial t}=-\psi_1G^2+\lambda^2G-\lambda^2\psi_{-1},\tag{22}$$

$$2\lambda\frac{\partial G}{\partial \lambda}=-(\psi_1'-\lambda\psi_1)G^2+\left(\frac{\psi_1''}{\psi_1}\lambda+2-\lambda^3\right)G+\lambda^2(\psi'_{-1}+\lambda\psi_{-1}).\tag{23}$$

(ii) Riccati 方程式 (22), (23) の解 G に対して Z_1 と Z_2 を次のようにして consistent に導入することができる．

$$G=\frac{\lambda}{\psi_1}\left(\frac{1}{Z_1}\frac{\partial Z_1}{\partial t}+\frac{\lambda}{2}\right)=\frac{2\lambda}{\psi_1'-\lambda\psi_1}\left[\frac{1}{Z_1}\frac{\partial Z_1}{\partial \lambda}+\frac{1}{4}\left(\frac{\psi_1''}{\psi_1}-\lambda^2\right)\right],\tag{24}$$

$$Z_2=\frac{1}{\psi_1}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial t}+\frac{\lambda Z_1}{2}\right),\qquad G=\lambda\,\frac{Z_2}{Z_1}.\tag{25}$$

(iii) Z_1, Z_2 は次の線形方程式の解である．

$$\frac{\partial Z}{\partial\lambda}=CZ,\quad \frac{\partial Z}{\partial t}=DZ,\quad Y=\begin{pmatrix} Z_1\\ Z_2\end{pmatrix}. \tag{26}$$

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix}0 & -\frac{\psi_1}{2}\\ -\frac{z}{2\psi_1} & 0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}-\frac{z+t}{2} & \frac{\psi_1 u_0}{2}\\ -\frac{zu_0+2\alpha}{\psi_1} & \frac{z+t}{2}\end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$D=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0 & \psi_1\\ \frac{z}{\psi_1} & 0\end{pmatrix},\quad z=-\psi_{-1}\psi_1. \tag{28}$$

線形方程式 (26)-(28) は $\mathrm{P_{II}}[\alpha]$ の補助線形問題に他ならない [5]．

命題 2.6

$$G^{(2)}(t,\lambda)=\frac{1}{\psi_1}\lambda^2+\frac{\psi_1'}{\psi_1^2}\lambda-\frac{1}{\psi_1^2}\sum_{i=0}^{\infty}f_i(-\lambda)^{-i}, \tag{29}$$

とおくと，

$$\frac{\tau_{n+1}}{\tau_1}=\det(f_{i+j-2})_{1\le i,j\le n}\quad (n>0), \tag{30}$$

が成り立つ．

さらに母函数 $F^{(j)}$, $G^{(j)}$, $j=1,2$ の間には次の簡単な関係式が成り立つ．

命題 2.7

$$F^{(2)}(t,\lambda)=\frac{\lambda^2}{G^{(1)}(t,-\lambda)},\quad G^{(2)}(t,\lambda)=\frac{\lambda^2}{F^{(1)}(t,-\lambda)}. \tag{31}$$

命題 2.7は示すべき式を Riccati 方程式 (13), (14), (22), (23) に代入して比較し，leading order を考慮すれば簡単に確かめることができる．

以上で，母函数と補助線形問題の間に簡単だが謎めいた関係があることがわかった．実は $\mathrm{P_{II}}$ だけでなく，Painlevé IV 方程式 ($\mathrm{P_{IV}}$) にも全く同じ構造があることが示されている [7]．その結果は，ここで議論した現象が Painlevé 方程式全てに見られること，および，それが Painlevé 方程式特有の現象ではなく τ 函数列を記述する Toda 方程式そのものの構造であることを示唆する．次章では実際に Toda 方程式に同じ構造が見られることを示す．

3　Toda 方程式の解の Hankel determinant formula

3.1　Determinant formula と補助線形問題

Toda 方程式

$$\frac{dV_n}{dt}=V_n(I_n-I_{n+1}),\quad \frac{dI_n}{dt}=V_{n-1}-V_n,\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{32}$$

は変数変換

$$V_n=\frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2},\quad I_n=\frac{d}{dt}\log\frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \tag{33}$$

によって双線形形式

$$\tau_n''\tau_n-(\tau_n')^2=\tau_{n+1}\tau_{n-1},\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{34}$$

に帰着する．補助線形問題は

$$\begin{cases} V_{n-1}\Psi_{n-1} + I_n\Psi_n + \Psi_{n+1} = \lambda\Psi_n, \\ \dfrac{d\Psi_n}{dt} = V_{n-1}\Psi_{n-1}, \end{cases} \tag{35}$$

で与えられる．または，シフト演算子 Λ： $\Lambda^{\pm 1} f_n = f_{n\pm 1}$ を導入すると

$$\begin{cases} L_n\Psi_n = \lambda\Psi_n, \\ \dfrac{d\Psi_n}{dt} = B_n\Psi_n, \end{cases} \qquad L_n = V_{n-1}\Lambda^{-1} + I_n + \Lambda, \quad B_n = V_{n-1}\Lambda^{-1}, \tag{36}$$

とも書ける．両立条件

$$\frac{dL_n}{dt} = [B_n, L_n], \tag{37}$$

が Toda 方程式 (32) を与える．τ_n の determinant formula は

$$\frac{\tau_{k+n}}{\tau_k} = \begin{cases} \det(a^{(k)}_{i+j-2})_{i,j=1,\ldots,n} & n > 0, \\ 1 & n = 0, \\ \det(b^{(k)}_{i+j-2})_{i,j=1,\ldots,|n|} & n < 0, \end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{cases} a^{(k)}_i = a^{(k)\prime}_{i-1} + \dfrac{\tau_{k-1}}{\tau_k}\displaystyle\sum_{l=0}^{i-2} a^{(k)}_l a^{(k)}_{i-2-l}, \quad a^{(k)}_0 = \dfrac{\tau_{k+1}}{\tau_k}, \\ b^{(k)}_i = b^{(k)\prime}_{i-1} + \dfrac{\tau_{k+1}}{\tau_k}\displaystyle\sum_{l=0}^{i-2} b^{(k)}_l b^{(k)}_{i-2-l}, \quad b^{(k)}_0 = \dfrac{\tau_{k-1}}{\tau_k}, \end{cases} \tag{39}$$

で与えられる [9]．これは整数 k を固定して $\tau_k = 1$ と規格化したとき，τ_{k+n} を $|n| \times |n|$ 行列式で書く公式である．次に，要素の母函数と補助線形問題の解の関係を調べると次の定理を得る：

定理 3.1 $\Xi_k(t,\lambda) = \dfrac{\Psi_k(t,\lambda)}{\Psi_{k+1}(t,\lambda)}$ とおく．

(i) $\Xi_k(t,\lambda)$ は $\lambda = \infty$ の周りで 2 種類の形式ベキ級数展開を許容する．

$$\Xi^{(-1)}_k(t,\lambda) = u_{-1}\lambda^{-1} + u_{-2}\lambda^{-2} + \cdots, \tag{40}$$

$$\Xi^{(1)}_k(t,\lambda) = v_1\lambda + v_0 + v_{-1}\lambda^{-1} + \cdots. \tag{41}$$

(ii) 以下のことが成り立つ．

$$\Xi^{(-1)}_k(t,\lambda) = \frac{1}{\lambda}\frac{\tau_k}{\tau_{k-1}}\sum_{i=0}^{\infty} b^{(k)}_i\ \lambda^{-i}, \tag{42}$$

$$\Xi^{(1)}_k(t,\lambda) = \frac{\tau_k^2}{\tau_{k+1}\tau_{k-1}}\left[\lambda - \frac{\left(\frac{\tau_k}{\tau_{k+1}}\right)'}{\frac{\tau_k}{\tau_{k+1}}} - \frac{1}{\lambda}\frac{\tau_k}{\tau_{k+1}}\sum_{i=0}^{\infty} a^{(k+1)}_i\ (-\lambda)^{-i}\right]. \tag{43}$$

定理 3.1の証明の概略 線形問題 (35) より $\Xi_k(t,\lambda)$ は Riccati 方程式

$$\frac{\partial \Xi_k}{\partial t} = -V_k\Xi_k^2 + (\lambda - I_k)\Xi_k - 1, \tag{44}$$

を満たす．λ に関する級数展開

$$\Xi_k = \lambda^\rho \sum_{i=0}^{\infty} h_i \ \lambda^{-i}$$

を仮定して (44) に代入し主要項を比較すると $\rho = 1, -1$ であることがわかる．また，それぞれの場合に係数の漸化式を導き，(39) と比較することで (ii) を確かめることができる．□

Ξ_k は $\mathrm{P_{II}}$ の場合の母函数 G に相当するが，F に相当する対象はどこにいるのだろうか．その鍵は随伴線形問題にある．線形問題 (35) に対する随伴問題は

$$\begin{cases} \Phi_{n-1} + I_n \Phi_n + V_n \Phi_{n+1} = \lambda \Phi_n, \\ \dfrac{d\Phi_n}{dt} = -V_k \Phi_{n+1}, \end{cases} \tag{45}$$

もしくは

$$\begin{cases} L_n^* \Phi_n = \lambda \Phi_n, \\ -\dfrac{d\Phi_n}{dt} = B_n^* \Phi_n, \end{cases} \qquad L_n^* = V_n \Lambda + I_n + \Lambda^{-1}, \quad B_n^* = V_n \Lambda, \tag{46}$$

で与えられる．

定理 3.2 $\Omega_k(t,\lambda) = \dfrac{\Phi_{k+1}(t,-\lambda)}{\Phi_k(t,-\lambda)}$ とおく．

(i) $\Omega_k(t,\lambda)$ は $\lambda = \infty$ の周りで 2 種類の形式ベキ級数展開を許容する．

$$\Omega_k^{(-1)}(t,\lambda) = u_{-1}\lambda^{-1} + u_{-2}\lambda^{-2} + \cdots, \tag{47}$$

$$\Omega_k^{(1)}(t,\lambda) = v_1 \lambda + v_0 + v_{-1}\lambda^{-1} + \cdots. \tag{48}$$

(ii) 以下のことが成り立つ．

$$\Omega_k^{(-1)}(t,\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \frac{\tau_k}{\tau_{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(k)} \ \lambda^{-i}, \tag{49}$$

$$\Omega_k^{(1)}(t,\lambda) = \frac{\tau_k^2}{\tau_{k+1}\tau_{k-1}} \left[-\lambda - \frac{\left(\frac{\tau_{k-1}}{\tau_k}\right)'}{\frac{\tau_{k-1}}{\tau_k}} + \frac{1}{\lambda} \frac{\tau_k}{\tau_{k-1}} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(k-1)} \ (-\lambda)^{-i} \right]. \tag{50}$$

定理 3.2も Ω_k の満たす Riccati 方程式

$$\frac{\partial \Omega_k}{\partial t} = V_k \Omega_k^2 + (I_{k+1} + \lambda)\Omega_k + 1, \tag{51}$$

から定理 3.1の証明と全く同じ手続きで示すことができる．□

さらに Riccati 方程式に代入し，leading order を比べることで次のことがわかる．

命題 3.3

$$\Omega_k^{(1)}(t,-\lambda) \ \Xi_k^{(-1)}(t,\lambda) = \frac{\tau_k^2}{\tau_{k+1}\tau_{k-1}}, \quad \Omega_k^{(-1)}(t,-\lambda) \ \Xi_k^{(1)}(t,\lambda) = \frac{\tau_k^2}{\tau_{k+1}\tau_{k-1}}. \tag{52}$$

3.2 $\mathrm{P_{II}}$ の場合との対応: local Lax pair

3.2.1 Local Lax pair

前節で明らかになったように，$\mathrm{P_{II}}$ および $\mathrm{P_{IV}}$ で見られる，補助線形問題の解と determinant formula の関係は Toda 方程式に起因するものと考えるのが自然である．Painlevé 方程式の Bäcklund 変換による τ 函数列 は Toda 方程式で記述される [16, 17, 18, 19, 5, 9]．本節では前節の結果と $\mathrm{P_{II}}$ の結果をきちんと対応づけておく．鍵となるのは "local Lax pair" と呼ばれる 2×2 行列の組で定式化される， Toda 方程式に対する線形問題である (Fadeev-Takhtajan).

$$\widetilde{L}_n\phi_n=\phi_{n+1},\quad \frac{d\phi_n}{dt}=\widetilde{B}_n\phi_n,\quad \phi_n=\begin{pmatrix}\phi_n^{(1)}\\ \phi_n^{(2)}\end{pmatrix},\tag{53}$$

$$\widetilde{L}_n(t,\lambda)=\begin{pmatrix}-I_n+\lambda & -\mathrm{e}^{-x_n}\\ \mathrm{e}^{x_n} & 0\end{pmatrix},\quad \widetilde{B}_n(t,\lambda)=\begin{pmatrix}-\frac{\lambda}{2} & \mathrm{e}^{-x_n}\\ -\mathrm{e}^{x_{n-1}} & \frac{\lambda}{2}\end{pmatrix},\quad x_n=\log\frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}.\tag{54}$$

同様に随伴線形問題は

$$\widetilde{L}_n^*\varphi_n=\varphi_{n-1},\quad -\frac{d\varphi_n}{dt}=\widetilde{B}_n^*\varphi_n,\quad \varphi_n=\begin{pmatrix}\varphi_n^{(1)}\\ \varphi_n^{(2)}\end{pmatrix},\tag{55}$$

$$\widetilde{L}_n^*(t,\lambda)=\begin{pmatrix}-I_n+\lambda & \mathrm{e}^{x_n}\\ -\mathrm{e}^{-x_n} & 0\end{pmatrix},\quad \widetilde{B}_n^*(t,\lambda)=\begin{pmatrix}-\frac{\lambda}{2} & -\mathrm{e}^{x_n}\\ \mathrm{e}^{-x_{n+1}} & \frac{\lambda}{2}\end{pmatrix},\tag{56}$$

で与えられる．両立条件

$$\frac{d\widetilde{L}_n}{dt}=\widetilde{B}_{n+1}\widetilde{L}_n-\widetilde{L}_n\widetilde{B}_n,\quad \frac{d\widetilde{L}_n^*}{dt}=-\widetilde{B}_{n-1}^*\widetilde{L}_n^*+\widetilde{L}_n^*\widetilde{B}_n^*,\tag{57}$$

がそれぞれ Toda 方程式 (32) を与える．(53), (54) と (35)，および (55), (56) と (45) をそれぞれ比較すれば容易にわかるように，線形問題の解の間には

$$\phi_k^{(1)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda t}\ \Psi_k,\quad \phi_k^{(2)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda t}\frac{\tau_{k-1}}{\tau_{k-2}}\ \Psi_{k-1},\tag{58}$$

$$\varphi_k^{(1)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda t}\ \Phi_k,\quad \varphi_k^{(2)}=-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda t}\frac{\tau_{k+1}}{\tau_k}\ \Phi_{k+1}.\tag{59}$$

という関係がある．

3.2.2 $\mathrm{P_{II}}$ との関係

$\mathrm{P_{II}}$ の determinant formula との関連で現れた補助線形問題は

$$\frac{\partial Y}{\partial\lambda}=AY,\quad \frac{\partial Y}{\partial t}=BY,\quad Y=\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\end{pmatrix},\tag{60}$$

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix}0 & -\frac{\psi_{-1}}{2}\\ \frac{\psi_1}{2} & 0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}-\frac{z+t}{2} & -\frac{\psi_{-1}u_{-1}}{2}\\ \frac{\psi_1u_0}{2} & \frac{z+t}{2}\end{pmatrix},\tag{61}$$

$$B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0 & \psi_{-1}\\ -\psi_1 & 0\end{pmatrix},\quad z=-\psi_{-1}\psi_1,\quad \psi_{\pm1}=\frac{\tau_{\pm1}}{\tau_0},\tag{62}$$

と書くこともできる．これと比較するべき Toda 方程式の随伴線形問題は

$$\widetilde{L}_n^*(t,-\lambda)\varphi_n(t,-\lambda)=\varphi_{n-1}(t,-\lambda),\quad \frac{d\varphi_n(t,-\lambda)}{dt}=-\widetilde{B}_n^*(t,-\lambda)\varphi_n(t,-\lambda),\quad \varphi_n=\begin{pmatrix}\varphi_n^{(1)}\\ \varphi_n^{(2)}\end{pmatrix},\tag{63}$$

$$\widetilde{L}_n^*(t,-\lambda)=\begin{pmatrix}-\frac{d}{dt}\log\frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}-\lambda & \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}\\ -\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}} & 0\end{pmatrix},\quad -\widetilde{B}_n^*(t,-\lambda)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0 & \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}\\ -\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} & 0\end{pmatrix}.\tag{64}$$

である．明らかに

$$B(t,\lambda)=-\widetilde{B}_0^*(t,-\lambda),\tag{65}$$

となっていることがわかる．そこで定理 3.2を適用すると，(59) より

$$\Omega_0(t,\lambda)=\frac{\Phi_1(t,-\lambda)}{\Phi_0(t,-\lambda)}=-\frac{\tau_0}{\tau_1}\frac{\varphi_0^{(2)}(t,-\lambda)}{\varphi_0^{(1)}(t,-\lambda)},$$

となることに注意して，

$$\begin{aligned}\lambda\left[\frac{\varphi_0^{(2)}(t,-\lambda)}{\varphi_0^{(1)}(t,-\lambda)}\right]^{(-1)}&=\sum_{i=0}^{\infty}a_i^{(0)}\lambda^{-i},\\ \lambda\left[\frac{\varphi_0^{(2)}(t,-\lambda)}{\varphi_0^{(1)}(t,-\lambda)}\right]^{(1)}&=\frac{\tau_0}{\tau_{-1}}\lambda^2+\lambda\frac{\left(\frac{\tau_{-1}}{\tau_0}\right)'}{\left(\frac{\tau_{-1}}{\tau_0}\right)^2}-\left(\frac{\tau_0}{\tau_{-1}}\right)^2\sum_{i=0}^{\infty}b_i^{(-1)}\ (-\lambda)^{-i},\end{aligned}\tag{66}$$

を得る．これはまさに定理 2.3 および命題 2.4 の結果に他ならない．同様に，

$$\frac{\partial Z}{\partial\lambda}=CZ,\quad \frac{\partial Z}{\partial t}=DZ,\quad Y=\begin{pmatrix}Z_1\\ Z_2\end{pmatrix},\tag{67}$$

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix}0 & -\frac{\psi_1}{2}\\ \frac{\psi_{-1}}{2} & 0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}-\frac{z+t}{2} & \frac{\psi_1 u_0}{2}\\ -\frac{u_{-1}\psi_{-1}}{2} & \frac{z+t}{2}\end{pmatrix},\tag{68}$$

$$D=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0 & \psi_1\\ -\psi_{-1} & 0\end{pmatrix},\tag{69}$$

に対しては，線形問題

$$\widetilde{L}_n(t,\lambda)\phi_n(t,\lambda)=\phi_{n+1}(t,\lambda),\quad \frac{d\phi_n(t,\lambda)}{dt}=\widetilde{B}_n\phi_n(t,\lambda),\quad \phi_n=\begin{pmatrix}\phi_n^{(1)}\\ \phi_n^{(2)}\end{pmatrix},\tag{70}$$

$$\widetilde{L}_n(t,\lambda)=\begin{pmatrix}-\frac{d}{dt}\log\frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}+\lambda & -\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}\\ \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} & 0\end{pmatrix},\quad \widetilde{B}_n(t,\lambda)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0 & \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}\\ -\frac{\tau_{n-2}}{\tau_{n-1}} & 0\end{pmatrix},\tag{71}$$

が対応する．明らかに

$$D(t,\lambda)=\widetilde{B}_1(t,\lambda),\tag{72}$$

となっている．定理 3.1を適用すると，(58) より

$$\Xi_0(t,\lambda)=\frac{\Psi_0(t,\lambda)}{\Psi_1(t,\lambda)}=\frac{\tau_0}{\tau_{-1}}\frac{\phi_1^{(2)}(t,\lambda)}{\phi_1^{(1)}(t,\lambda)},$$

となることに注意して

$$
\begin{aligned}
\lambda\left[\frac{\phi_1^{(2)}(t,\lambda)}{\phi_1^{(1)}(t,\lambda)}\right]^{(-1)} &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(0)}\ \lambda^{-i},\\
\lambda\left[\frac{\phi_1^{(2)}(t,\lambda)}{\phi_1^{(1)}(t,\lambda)}\right]^{(1)} &= \frac{\tau_0}{\tau_1}\lambda^2 - \frac{\left(\frac{\tau_0}{\tau_1}\right)'}{\left(\frac{\tau_0}{\tau_1}\right)^2}\lambda - \left(\frac{\tau_0}{\tau_1}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_i^{(1)}\ (-\lambda)^{-i},
\end{aligned}
\tag{73}
$$

を得る．これも定理 2.5および命題 2.6の結果に他ならない．このようにして $\mathrm{P_{II}}$ の結果は Toda 方程式の構造だけから再現される．結局解の determinant formula の要素と補助線形問題との関係は Toda 方程式の構造に起因するものであることになる．

注意 3.4 線形問題 (60)-(62) および (67)-(69) はそれぞれ $\mathrm{P_{II}}[\alpha-1]$ および $\mathrm{P_{II}}[\alpha]$ の補助線形問題ではあるが，後者が前者の単純な平行移動になっていない．実は，今までの議論で明らかなように，これらの問題は Toda 方程式のレベルでは互いに他の随伴線形問題となっており，実際

$$
C(t,\lambda) = {}^tA(t,-\lambda), \quad B(t,\lambda) = -{}^tD(t,-\lambda) \tag{74}
$$

が成り立っている (B, D に負号がついているのは t に関する随伴性に対応して d/dt の符号が変わることによる)．これらが $\mathrm{P_{II}}$ の平行移動した線形問題となる理由は不明であり，今後きちんと説明されるべきであろう．

3.3 有限 Toda 方程式：Moser-Nakamura の研究との関連

3.3.1 有限 Toda 方程式と解の determinant formula

Toda 方程式の表示にはいくつかの variation がある．例えば，

$$
\frac{d^2x_n}{dt^2} = \mathrm{e}^{x_{n-1}-x_n} - \mathrm{e}^{x_n-x_{n+1}}, \quad x_n = \log\frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}, \tag{75}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\alpha_n}{dt} &= \alpha_n(\beta_{n+1}-\beta_n),\\
\frac{d\beta_n}{dt} &= 2(\alpha_n^2-\alpha_{n-1}^2),
\end{aligned}
\right.
\qquad \alpha_n = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x_n-x_{n+1}}{2}}, \quad \beta_n = -\frac{1}{2}\frac{dx_n}{dt}, \tag{76}
$$

など．(76) は Flaschka 形式と呼ばれる．

本節では Toda 方程式を有限格子 $n=0,\ldots,N$ 上で考える．すなわち境界条件

$$
\begin{aligned}
&V_0 = 0, && V_N = 0,\\
&x_0 = -\infty, && x_{N+1} = \infty,\\
&\alpha_0 = 0, && \alpha_N = 0,
\end{aligned}
\tag{77}
$$

をそれぞれ (32), (75), (76) に課す．τ 函数のレベルでこれを実現するためには次のようにすればよい．双線形形式 (34) において，格子の左端で境界条件

$$
\tau_{-1} = 0, \quad \tau_0 \neq 0, \tag{78}
$$

をおくと，直ちに $\tau_n = 0$ $(n \le -1)$ が従う (いわゆる semi-infinite Toda molecule)． このとき，determinant formula はよく知られている Darboux の公式 [2]

$$
\frac{\tau_k}{\tau_0} = \det(a_{i+j-2}^{(0)})_{i,j=1,\cdots,k}\ (n\ge 1), \quad a_{i+1}^{(0)} = a_i^{(0)\prime}, \quad a_0^{(0)} = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \tag{79}
$$

となる．さらに格子の右端で境界条件

$$\tau_N \neq 0, \quad \tau_{N+1} = 0, \tag{80}$$

を課すと同様に $\tau_n = 0$ $(n \geq N+1)$ となり，有限 Toda 方程式

$$\tau_n''\tau_n - (\tau_n')^2 = \tau_{n+1}\tau_{n-1}, \quad n = 0, \cdots, N, \quad \tau_{-1} = \tau_{N+1} = 0, \tag{81}$$

を得る．Determinant formula で境界条件 (80) を満たすためには c_i, μ_i, $(i = 1, \ldots, N)$ を任意定数[*1]として

$$a_0^{(0)} = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathrm{e}^{\mu_i t}, \tag{82}$$

とおけばよい．実際,

$$(a_{i+j-2}^{(0)})_{i,j=1,\cdots,n} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_N \\ \mu_1 c_1 & \mu_2 c_2 & \cdots & \mu_N c_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu_1^n c_1 & \mu_2^n c_2 & \cdots & \mu_N^n c_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mu_1 t} & \mu_1 \mathrm{e}^{\mu_1 t} & \cdots & \mu_1^n \mathrm{e}^{\mu_1 t} \\ \mathrm{e}^{\mu_2 t} & \mu_2 \mathrm{e}^{\mu_2 t} & \cdots & \mu_2^n \mathrm{e}^{\mu_2 t} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\mu_N t} & \mu_N \mathrm{e}^{\mu_N t} & \cdots & \mu_N^n \mathrm{e}^{\mu_N t} \end{pmatrix}, \tag{83}$$

であるから,

$$\tau_N = \prod_{i=1}^{N} c_i \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\mu_i - \mu_j)^2 \mathrm{e}^{(\mu_1 + \cdots \mu_N)t} \to \tau_{N+1} = \frac{\tau_N''\tau_N - (\tau_N')^2}{\tau_{N-1}} = 0,$$

となる．もしくは，(83) の右辺の行列式が $n > N$ で 0 になることは Binet-Cauchy の公式 (例えば [3], p.65 参照) の直接の帰結である．

よく知られているように，Flaschka 形式の補助線形問題は

$$\alpha_{n-1}\overline{\Psi}_{n-1} + \beta_n \overline{\Psi}_n + \alpha_n \overline{\Psi}_{n+1} = \mu \overline{\Psi}_n, \quad \frac{d\overline{\Psi}_n}{dt} = -\alpha_{n-1}\overline{\Psi}_{n-1} + \alpha_n \overline{\Psi}_{n+1}, \quad n = 1, \cdots, N, \tag{84}$$

または

$$\overline{L\Psi} = \mu\overline{\Psi}, \quad \frac{d\overline{\Psi}}{dt} = \overline{B}\Psi, \quad \overline{\Psi} = \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_1 \\ \overline{\Psi}_2 \\ \vdots \\ \overline{\Psi}_N \end{pmatrix}, \tag{85}$$

$$\overline{L} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & & & \\ \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{N-2} & \beta_{N-1} & \alpha_N \\ & & 0 & \alpha_{N-1} & \beta_N \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & & \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\alpha_{n-N} & 0 & \alpha_N \\ & & 0 & -\alpha_{N-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{86}$$

で与えられる．この線形問題は自己随伴であることに注意しておく．さらに，線形問題 (35) および随伴問題 (45) とは次のようにゲージ変換で結び付いている：

$$\begin{cases} \Psi_n = \mathrm{e}^{-\mu t}(-1)^n \mathrm{e}^{-\frac{x_n}{2}}\ \overline{\Psi}_n, \\ \Phi_n = \mathrm{e}^{\mu t}(-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x_n}{2}}\ \overline{\Psi}_n, \end{cases} \quad \mu = -\frac{1}{2}\lambda. \tag{87}$$

[*1] μ_i は後述の補助線形問題の固有値となるが，今は本質的ではない．

Determinant の要素と線形問題の解の間の関係は，定理 3.2を適用して

$$\Omega_0^{(-1)}(t,\lambda) = \left[\frac{\Phi_1(t,-\lambda)}{\Phi_0(t,-\lambda)}\right]^{(-1)} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{a_0^{(0)}}\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(0)}\lambda^{-i}, \tag{88}$$

となっている．しかしながら，対応 (87) を用いて (88) を Flaschka 形式の線形問題の解 $\overline{\Psi}$ で表示することはできない．というのは，有限の場合そもそも $\overline{\Psi}_0$ は定義されていないし，(87) で無理に対応づけるにしても $x_0 = -\infty$ であるから，意味のある対応にはならないからである．

3.3.2 Moser-Nakamura の結果

有限 Toda 方程式については Moser が作用-角変数を構成して可積分性を証明し [12]，それをベースにして Nakamura は我々とほぼ同等の結果を得ている [13]．本節では Moser-Nakamura の結果と我々の結果との比較検討を行う．

Moser は 行列 $\overline{L}$ の resolvent の (N,N) 成分

$$(\mu I - \overline{L})^{-1}_{NN} = \frac{\Delta_{N-1}}{\Delta_N}, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \mu-\beta_1 & -\alpha_1 & & & \\ -\alpha_1 & \mu-\beta_2 & -\alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\alpha_{n-2} & \mu-\beta_{n-1} & -\alpha_{n-1} \\ & & 0 & -\alpha_{n-1} & \mu-\beta_n \end{vmatrix}, \tag{89}$$

を考察し，μ の有理函数として解析的な性質を議論することで有限 Toda 方程式の作用-角変数を導いた．Nakamura はさらにこの有理函数の $\mu=\infty$ 周りの展開を考察して

$$\frac{\Delta_{N-1}}{\Delta_N} = \frac{1}{\mu}\frac{1}{g_0}\sum_{i=0}^{\infty} g_i\,(-2\mu)^{-i}, \quad g_i' = g_{i+1}, \tag{90}$$

を導き，g_i が determinant formula (79) の要素であると主張した．

さて，我々は行列 $\overline{L}$ の resolvent の (1,1) 成分を考えることにする：

$$(\mu I - \overline{L})^{-1}_{11} = \frac{\overline{\Delta}_1}{\overline{\Delta}_0}, \quad \overline{\Delta}_n = \begin{vmatrix} \mu-\beta_{n+1} & -\alpha_{n+1} & & & \\ -\alpha_{n+1} & \mu-\beta_{n+2} & -\alpha_{n+2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\alpha_{N-2} & \mu-\beta_{N-1} & -\alpha_{N-1} \\ & & 0 & -\alpha_{N-1} & \mu-\beta_N \end{vmatrix}. \tag{91}$$

行列式の第 1 行で展開すると，$\overline{\Delta}_n$ の満たす漸化式を得る：

$$\overline{\Delta}_n = (\mu-\beta_{n+1})\overline{\Delta}_{n+1} - \alpha_{n+2}^2\overline{\Delta}_{n+2}. \tag{92}$$

(92) と線形問題 (45) および (84) を比較すると，$F_1(t), G_1(t)$ を t の函数として

$$\overline{\Delta}_n = F_1(t)\ 2^n \mathrm{e}^{\frac{x_n}{2}}\ \overline{\Psi}_n = G_1(t)\ (-2)^n\ \Phi_n, \tag{93}$$

が成り立つ．従って，$\overline{\Delta}_n$ が μ に関して $(N-n)$ 次多項式であることに注意すると，(88) は

$$\frac{\overline{\Delta}_1}{\overline{\Delta}_0} = \frac{1}{\mu}\frac{1}{a_0^{(0)}}\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(0)}(-2\mu)^{-i}, \tag{94}$$

と書き直される．これは Nakamura の結果 (90) と大変よく似ている．そこで，Nakamura の結果を我々の言葉で解釈してみよう．

$\overline{\Delta}_n$ の場合と同様に (89) の行列式を第 n 行で展開することによって，Δ_n は漸化式

$$\Delta_n = (\mu - \beta_n)\Delta_{n-1} - \alpha_{n-1}^2\Delta_{n-2}, \tag{95}$$

を満たすことがわかる．従って線形問題 (35) および (84) と比較すると，$F_2(t)$, $G_2(t)$ を t の函数として

$$\Delta_n = F_2(t)\ 2^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{x_n}{2}}\ \overline{\Psi}_{n+1} = G_2(t)(-2)^{-n}\ \Psi_{n+1}, \tag{96}$$

となる．今，定理 3.1の公式 (42) において $n = N$ とすると，

$$\frac{\tau_{N-n}}{\tau_N} = \det(b_{i+j-2}^{(N)})_{i,j=1,\ldots,n}, \quad b_i^{(N)} = b_{i-1}^{(N)\prime} + \frac{\tau_{N+1}}{\tau_N}\sum_{j=0}^{i-2} b_j^{(N)} b_{i-2-j}^{(N)}, \quad b_0^{(N)} = \frac{\tau_{N-1}}{\tau_N}, \tag{97}$$

$$\left[\frac{\Psi_N(t,\lambda)}{\Psi_{N+1}(t,\lambda)}\right]^{(-1)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\tau_N}{\tau_{N-1}}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(N)}\ \lambda^{-i}, \tag{98}$$

を得る．そこで境界条件 (80) を考慮し，Δ_n が μ の n 次多項式であることに注意すると，(97), (98) は (96) を用いて

$$\begin{gathered}\frac{\Delta_{N-1}}{\Delta_N} = \frac{1}{\mu}\frac{\tau_N}{\tau_{N-1}}\sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(N)}\ (-2\mu)^{-i}, \quad b_i^{(N)} = b_{i-1}^{(N)\prime}, \\ \frac{\tau_{N-n}}{\tau_N} = \det(b_{i+j-2}^{(N)})_{i,j=1,\ldots,n}, \quad b_0^{(N)} = \frac{\tau_{N-1}}{\tau_N},\end{gathered} \tag{99}$$

と書き直される．これは (90) に他ならない．格子の左端の境界条件 (78) を満足するためには $b_0^{(N)}$ を指数函数の N 項の和に取っておけばよい．

結局，Nakamura の結果は 格子番号 n を逆から見た determinant formula，すなわち $n = N$ から出発，$\tau_N = 1$ と規格化して，τ_{N-n} を $n \times n$ 行列式として書く determinant formula の要素を導いたものだと解釈できる．有限 Toda 方程式は格子の反転 ($n \to N - n$) に対して対称なので，結果として $\tau_0 = 1$ と規格化して τ_n を $n \times n$ 行列式として表示する「通常の」公式と同じものが得られたわけである．また，格子の有限性と反転に関する対称性，また線形問題を自己随伴な Flaschka 形式に取ったことから，さまざまなものが縮退してかえって構造が見えにくくなっていた．さらに，resolvent が出現する理由は，$\mu I - \overline{L}$ の首座小行列式が (適当なゲージの下で) 補助線形問題の解になっているためであることがわかった．

4　おわりに

本報告では Painlevé 方程式の有理解を特徴づける特殊多項式の Hankel determinant formula に関して，要素の母函数が超幾何型特殊函数の対数微分で記述されるという観察をまず説明した．そして Hankel determinant formula の要素の母函数は補助線形問題の解の比であること，またその構造は実は Painlevé 方程式の Bäcklund 変換を記述する Toda 方程式そのものの構造に起因するものであることを示した．さらには有限 Toda 方程式に関する Moser-Nakamura による先行研究との関連をきちんとつけた．

最後のことを少々くどいほど詳しく書いたのは，不思議な巡り合わせを経験した著者の「思い入れ」による．この場を借りて少し述べてみたい．著者が学位を取り初めて職を得た 1994 年頃，有限 Toda 方程式において

Lax pair の L-operator の resolvent を考えるとそこから τ 函数の要素が得られるという不思議な結果を，当時同じ研究室に在職しておられた中村佳正さんから伺ってずいぶん驚いた．著者が 「resolvent」なる単語を知ったのは関数解析の本で，可積分系の基本オブジェクト τ 函数の determinant という固い殻が，関数解析という難しい分野で鍛え上げられてきた鉄槌「resolvent」で砕かれて，もっとも奥深い果肉の部分が得られる，そういうイメージを持った．しかしなぜ resolvent で…というのが正直な感想であった．その疑問を中村さんにお尋ねしたが中村さんもよくわからないということで，この結果を利用して中村さんと共同研究もしたが [14]，やはりよくわからなかった．時は巡り，中村さんも著者も大学を移り，研究分野も少し離れたが，このことはずっと気になっていた．ところが Painlevé 方程式の有理解の determinant formula の研究から，はしなくも Toda 方程式に戻ってきたわけである．思い出せば有理解の determinant formula を研究していたのも実は同時期であって，もちろん，当時それらは全く関係がないと思っていた．それらが巡りめぐって結び付いたわけで，著者としては何とも言えない感懐を覚えるわけである*2.

もっともこれで当初の疑問が解決したわけではなく，

「なぜ L-operator の resolvent から τ の要素が得られるのか」

という問題が

「なぜ補助線形問題の解の比から τ の要素が得られるのか」

に変わったに過ぎない．ただ，普段見慣れているもの同士の関係を探る問題に帰着したわけで，格段に研究しやすくなったと思う．本稿で報告した，線形問題の解の比のスペクトルパラメータの無限遠点周りの展開が，determinant formula の要素を与えるという構造は，KP 理論からきちんと説明されるべきであろう．今後の課題である．

参考文献

[1] H. Goto and K. Kajiwara, Generating function related to the Okamoto polynomials for the Painlevé IV equation, *Bull. Aust. Math. Soc.* **71**(2005) 517-526.

[2] R. Hirota, M. Ito, F. Kako, Two-dimensional Toda lattice equations, *Progr. Theoret. Phys. Suppl.* **94** (1988) 42–58.

[3] 伊理 正夫，韓大舜，「線形代数」，シリーズ新しい応用の数学 **16**，教育出版 (1985).

[4] K. Iwasaki, K. Kajiwara and T. Nakamura, Generating function associated with the rational solutions of the Painlevé II equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**(2002) L207–L211.

[5] M. Jimbo and T. Miwa, Monodoromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients.II, *Physica* **2D**(1981) 407–448.

[6] N. Joshi, K. Kajiwara and M. Mazzocco, Generating function associated with the determinant formula for solutions of the Painlevé II equation, *Astérisque* **274**(2004) 67-78.

[7] N. Joshi, K. Kajiwara and M. Mazzocco, Generating function associated with the determinant Formula for solutions of the Painlevé IV Equation, preprint, arXiv:nlin.SI/0512041.

*2 そう言えば，$\mathrm{P_{II}}$ の Yablonski-Vorob'ev 多項式の Hankel determinant formula をまじめに考えるきっかけになったのも，当時九大数理 M2 の学生で岩崎克則氏の指導を受けていた「中村君」が修士論文のテーマを求めて訪ねて来たことだった [4].

[8] K. Kajiwara and T. Masuda, A generalization of determinant formulae for the solutions of Painlevé II and XXXIV equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**(1999) 3763-3778.

[9] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada, Determinant formulas for the Toda and discrete Toda equations, *Funkcial. Ekvac.* **44**(2001) 291–307.

[10] K. Kajiwara and Y. Ohta, Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé II equation, *J. Math. Phys.* **37**(1996) 4693–4704.

[11] 三輪 哲二，神保 道夫，伊達 悦朗，「ソリトンの数理」，岩波講座 応用数学 [対象 4]，岩波書店 (1993).
英訳：T. Miwa, M. Jimbo and E. Date, *SOLITONS*, *Differential equations*, *symmetries and infinite dimensional algebras*, Cambridge tracts in mathematics Vol. 135, Cambridge University Press, 2000.

[12] J. Moser, Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential – an integrable system, in "*Dynamical Systems, Theory and Applications*", Lecture Notes in Physics **38**, ed. by J. Moser (Springer-Verlag, Berlin, 1975) 467–497.

[13] Y. Nakamura, A tau-function of the finite nonperiodic Toda lattice, Phys. Lett. **A195**(1994) 346–350.

[14] Y. Nakamura, K. Kajiwara and H. Shiotani, On an integrable discretization of the Rayleigh quotient gradient system and the power method with a shift, *J. Comput. Appl. Math.* **96** (1998) 77–90.

[15] 野海 正俊,「パンルヴェ方程式 – 対称性からの入門 –」，すうがくの風景 **4**, 朝倉書店 (2000).
英訳：M. Noumi, *Painlevé equations through symmetry*, Translations of mathematical monographs, Vol. 223, American Mathematical Society, 2004.

[16] K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations. I. Sixth Painlevé equation $P_{\rm VI}$. *Ann. Mat. Pura Appl.* **146** (1987) 337–381.

[17] K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations. II. Fifth Painlevé equation $P_{\rm V}$, Japan. J. Math. **13** (1987) 47–76.

[18] K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations. III. Second and fourth Painlevé equations, $P_{\rm II}$ and $P_{\rm IV}$, *Math. Ann.* **275** (1986) 221–255.

[19] K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations. IV.Third Painlevé equation $P_{\rm III}$, *Funkcial. Ekvac.* **30** (1987) 305–332.