

応用力学研究所研究集会報告 No.18ME-S5  
「非線形波動現象における基礎理論, 数値計算および実験のクロスオーバー」  
(研究代表者 西成 活裕)

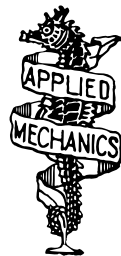
**Reports of RIAM Symposium No.18ME-S5**  
*Crossover among theoretical, numerical and experimental studies on nonlinear waves*  
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2006

Article No. 28

# Bスプラインガラーキン法による 数値シミュレーション

杉本昌平 (SUGIMOTO Shohei), 近藤弘一 (KONDO Koichi)

(Received December 1, 2006)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
May, 2007

# B スプラインガラーキン法による数値シミュレーション

同志社大学工学部 杉本 昌平 (SUGIMOTO Shohei)

近藤 弘一 (KONDO Koichi)

## 概要

発展方程式に対する数値スキームの多くは不連続な波やなめらかでない波に対して不向きである。ウェーブレット変換は不連続な波に対して有効である。しかし、ウェーブレット変換の代表的な直交基底は明示的な関数で表されない。基底関数のサンプリング点は数値計算のみで計算可能であり、計算結果には数値誤差が含まれ得る。一方、双直交なウェーブレット基底の 1 つに B スプラインがある。B スプラインは区分多項式として明示的な関数で定義される。したがって、B スプラインを用いた数値計算においては基底関数に起因する数値誤差は少ないと期待される。本論では B スプラインガラーキン法による微分方程式の数値解法に関する詳細な実験を行い、実用上の有効性を検証する。

## 1 はじめに

従来、発展方程式に対する数値計算スキームとしては、有限差分法や擬スペクトル法がよく用いられる。しかし、それらの手法は不連続点や特異点などの高周波成分を多く含む波形に対しては不向きである。例えば、擬スペクトル法は離散フーリエ変換を利用した演算であり、サンプリング定理により定まる最高周波数以上のスペクトルを含む関数には適用できない。またフーリエ変換の基底は正弦波であり、無限に広がる周期関数である。そのため、時間変動する信号波形のある特定部分の解析には不向きである。ウェーブレット変換はある種の窓フーリエ変換として 1982 年頃にモレーによって発明された。またウェーブレット変換は時間と周波数に相当する 2 つのパラメータをもち、時間周波数解析に利用される。ウェーブレット基底は局所的で鋭角な形をしているため、高周波成分を多く含む波の解析に適している。ウェーブレット基底を用いた微分方程式に対する数値スキームはウェーブレットガラーキン法 [7] により導出が可能である。高次のウェーブレット基底はサポート幅が大きく、正則性も良くなる。しかし、代表的な基底関数は明示的な関数で表されず、波の形状も非常に複雑である (c.f [9, p.127–134])。そのためガラーキン法において展開係数を求める際に多くの数値誤差が入り得る。一方、双直交なウェーブレット基底の 1 つに B スプライン (c.f [9, p.136–153]) がある。B スプラインは基底関数そのものが区分多項式として明示的に定義される。そのためガラーキン法において展開係数が明示的に求まり、数値誤差が少ないことが期待される。また本論では展開係数の導出は双直交性を用いず連立方程式の解として導出を行う。本論の目的は微分方程式の数値解法として B スプラインガラーキン法を用いて詳細な実験を行い、実用上の有効性を検証することである。

## 2 B スプラインガラーキン法

1 階のカーディナル B スプライン  $\phi_1(x)$  を

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \quad (1)$$

と定義する．これを用いて  $m$  階のカーディナル B スプライン  $\phi_m(x)$  は，

$$\phi_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{m-1}(x-t)\phi_1(t)dt \quad (2)$$

と定義される．このとき  $\phi_m(x)$  は

$$\phi_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{n} (x-k)_+^{m-1} \quad (3)$$

と表される．ここで  $x_+$  は切断ベキ関数であり

$$x_+ = \max(0, x), \quad (x_+)' = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad (x_+)^{\prime\prime} = \delta(x)$$

と定義される． $\phi_m(x)$  のサポートは  $\text{supp } \phi_m = (0, m)$  である．サポート幅は  $m$  となる．

関数  $f(x)$  の B スプライン級数展開は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \phi_m(x-k) \quad (4)$$

で表される．ここで  $\{f_k = f(k) \mid k = 0, 1, \dots, N-1\}$  である．また， $f(x)$  の  $n$  回導関数  $f^{(n)}(x)$  の B スプライン級数展開を

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k^{(n)} \phi_m(x-k) \quad (5)$$

と表す．ここで  $\{f_k^{(n)} = f^{(n)}(k) \mid k = 0, 1, \dots, N-1\}$  である．(4) を  $n$  回微分したものと (5) とを比較し，両辺に  $\phi_m(x-l)$  をかけて内積をとると

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k^{(n)} \langle \phi_m(x-l), \phi_m(x-k) \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \langle \phi_m(x-l), \phi_m^{(n)}(x-k) \rangle \quad (6)$$

となる．ただし，内積は  $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$  とする．ここで

$$\alpha_{l,k} = \langle \phi_m(x-l), \phi_m(x-k) \rangle = \alpha_{k-l}, \quad \beta_{l,k}^{(n)} = \langle \phi_m(x-l), \phi_m^{(n)}(x-k) \rangle = \beta_{k-l}^{(n)} \quad (7)$$

とおく．よって，(6) は (7) を用いて

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k-l} f_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{k-l}^{(n)} f_k, \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8)$$

と表される．したがって (8) を行列で表すと

$$A_m \mathbf{f}^{(n)} = B_m^{(n)} \mathbf{f}, \quad (9)$$

$$A_m = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\ \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad B_m^{(n)} = \begin{pmatrix} \beta_0^{(n)} & \beta_1^{(n)} & \beta_2^{(n)} & \beta_3^{(n)} & \cdots \\ \beta_{-1}^{(n)} & \beta_0^{(n)} & \beta_1^{(n)} & \beta_2^{(n)} & \cdots \\ \beta_{-2}^{(n)} & \beta_{-1}^{(n)} & \beta_0^{(n)} & \beta_1^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{f}^{(n)} = \left( f_0^{(n)} \quad f_1^{(n)} \quad \cdots \quad f_{N-1}^{(n)} \right)^T, \quad \mathbf{f} = \left( f_0 \quad f_1 \quad \cdots \quad f_{N-1} \right)^T \quad (11)$$

となる．これより  $\mathbf{f}^{(n)}$  は

$$\mathbf{f}^{(n)} = A_m^{-1} B_m^{(n)} \mathbf{f} \quad (12)$$

と求まる．これを B スプラインガラーキン法という．実際の数値計算では逆行列の計算は行わず，係数行列  $A_m$  と非同次項  $B_m^{(n)} \mathbf{f}$  による連立方程式を解く．一般に逆行列の数値計算より連立方程式の数値計算の方が誤差が小さいためである．

次に積  $f(x)f^{(n)}(x)$  の数値スキームを求める． $f f^{(n)}$  を B スプライン級数展開して

$$f(x)f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k^{(0,n)} \phi_m(x-k) \quad (13)$$

とする．ここで  $\{f_k^{(0,n)} = f(k)f^{(n)}(k) \mid k = 0, 1, \dots, N-1\}$  である．(4) を代入すると

$$f(x)f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f_k f_l \phi_m(x-k) \phi_m^{(n)}(x-l) \quad (14)$$

が得られる．(13) と (14) とを比較し，両辺に  $\phi_m(x-i)$  をかけて内積をとると

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k-i} f_k^{(0,n)} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \gamma_{k-i, l-i}^{(n)} f_k f_l \quad (15)$$

となる．ここで， $\alpha_{k-i}$  は (7) の第 1 式であり， $\gamma_{k-i, l-i}^{(n)}$  は

$$\gamma_{i, k, l}^{(n)} = \langle \phi_m(x-i), \phi_m(x-k) \phi_m^{(n)}(x-l) \rangle = \gamma_{k-i, l-i}^{(n)} \quad (16)$$

とする．したがって，(15) を行列の形で表すと

$$A_m \mathbf{f}^{(0,n)} = \mathbf{b}_m(\mathbf{f}), \quad \mathbf{f}^{(0,n)} = \left( f_0^{(0,n)} \quad f_1^{(0,n)} \quad \cdots \quad f_{N-1}^{(0,n)} \right)^T, \quad (17)$$

$$\mathbf{b}_m(\mathbf{f}) = \left( b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{N-1} \right)^T, \quad b_i = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \gamma_{k-i, l-i}^{(n)} f_k f_l \quad (18)$$

となる．ただし， $A_m$  は (10) の第 1 式であり， $\mathbf{f}$  は (11) の第 2 式である．また  $b_i$  は  $\mathbf{b}_m(\mathbf{f})$  の要素である．これより  $\mathbf{f}^{(0,n)}$  は

$$\mathbf{f}^{(0,n)} = A_m^{-1} \mathbf{b}_m(\mathbf{f}) \quad (19)$$

と求まる．実際には，(12) と同様に連立方程式の数値解法で  $\mathbf{f}^{(0,n)}$  を求める．

表 1: ガウシアンに対する最大誤差

	$f'$	$f''$	$f'''$	$ff'$	$ff''$	$ff'''$
B-spline ( $m=2$ )	$1.8 \times 10^{-5}$	—	—	$1.4 \times 10^{-3}$	—	—
B-spline ( $m=4$ )	$4.7 \times 10^{-10}$	$6.0 \times 10^{-8}$	$1.1 \times 10^{-6}$	$2.8 \times 10^{-3}$	$1.1 \times 10^{-2}$	$1.9 \times 10^{-2}$
B-spline ( $m=7$ )	$1.8 \times 10^{-14}$	$3.9 \times 10^{-13}$	$2.1 \times 10^{-12}$	$4.9 \times 10^{-3}$	$1.9 \times 10^{-2}$	$3.4 \times 10^{-2}$
coif2 (幅: 11)	$9.5 \times 10^{-8}$	$3.0 \times 10^{-5}$	$1.1 \times 10^{-4}$	$3.3 \times 10^{-6}$	$5.9 \times 10^{-5}$	$3.4 \times 10^{-4}$
sym10 (幅: 19)	$5.9 \times 10^{-14}$	$2.8 \times 10^{-11}$	$3.5 \times 10^{-8}$	$2.1 \times 10^{-4}$	$4.5 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-3}$
中心 4 次差分	$1.1 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-4}$	$2.3 \times 10^{-3}$	$9.1 \times 10^{-5}$	$1.3 \times 10^{-4}$	$2.0 \times 10^{-3}$

### 3 Bスプラインガラーキン法による発展方程式の数値スキーム

Bスプラインガラーキン法に基づく発展方程式の数値スキームを示す．1 階線形波動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t) \quad (20)$$

において空間，時間をそれぞれ  $x = j\Delta x$  ,  $t = n\Delta t$  と離散化し  $u(j\Delta x, n\Delta t) = u_j^n$  とおき，時間微分を前進差分で近似し，空間微分を (12) の B スプラインガラーキン法で近似すると数値スキーム

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) A_m^{-1} B_m^{(1)} \mathbf{u}^n, \quad \mathbf{u}^n = \left( u_0^n \quad u_1^n \quad \cdots \quad u_{N-1}^n \right)^T \quad (21)$$

が得られる．また，KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u = u(x, t) \quad (22)$$

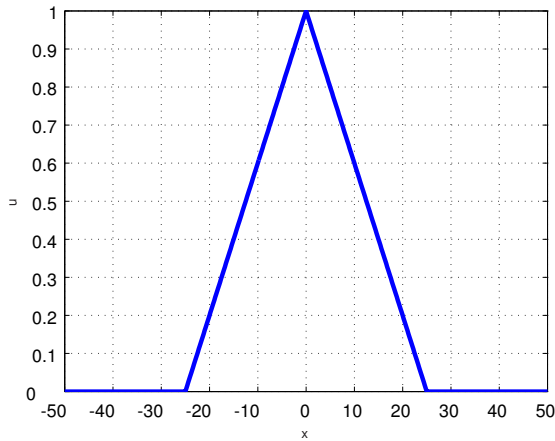
において，時間微分を前進差分で近似し，空間微分を非線形項  $uu_x$  は (19)，分散項  $u_{xxx}$  は (12) の B スプラインガラーキン法で近似すると数値スキーム

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) A_{m_1}^{-1} \mathbf{b}_{m_1}(\mathbf{u}^n) - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x^3} \right) A_{m_2}^{-1} B_{m_2}^{(3)} \mathbf{u}^n \quad (23)$$

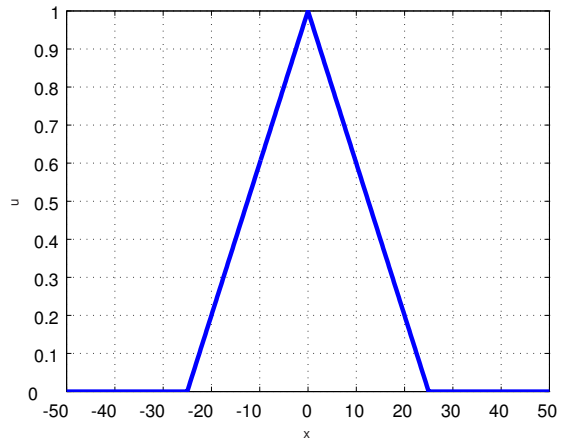
が得られる．ただし， $\mathbf{u}^n$  は (21) の第 2 式である．ここで，非線形項  $uu_x$  と分散項  $u_{xxx}$  のスプライン基底の階数を  $m_1$  と  $m_2$  と異なる値を用いることにする．

### 4 数値実験 1

関数  $f(x)$  の導関数  $f'$  ,  $f''$  ,  $f'''$  を (12) の B スプラインガラーキン法で近似する．また， $ff'$  ,  $ff''$  ,  $ff'''$  に関しては (19) の B スプラインガラーキン法で近似する．さらに，ウェーブレットガラーキン法 (coif2 , sym10) と有限差分法 (中心 4 次差分) でも近似し精度を比較する． $f(x)$  はガウシアン  $f(x) = e^{-x^2/100}$  とする．空間幅は  $-50 \leq x < 50$  として，刻み幅を  $\Delta x = 0.1$



(a)  $u(x, 0)$  の波形



(b)  $u(x, 100)$  の波形

図 1: 波形の変化 (初期波形 : 三角波, 基底の階数 :  $m = 2$ )

表 2: 保存量の誤差  $E(100)$  ( $\Delta t = 0.0001$ )

基底	ガウシアン	三角波
B-spline ( $m = 2$ )	$1.0 \times 10^{-4}$	$4.9 \times 10^{-5}$
B-spline ( $m = 4$ )	$1.0 \times 10^{-4}$	$4.9 \times 10^{-5}$
B-spline ( $m = 7$ )	$1.0 \times 10^{-4}$	$4.9 \times 10^{-5}$
coif2	$1.0 \times 10^{-4}$	$4.9 \times 10^{-5}$
sym10	$1.0 \times 10^{-4}$	$4.9 \times 10^{-5}$

表 3: 保存量の誤差  $E(100)$  ( $\Delta t = 0.01$ )

基底	ガウシアン	三角波
B-spline ( $m = 2$ )	86.8	25.3
B-spline ( $m = 4$ )	51.3	15.1
B-spline ( $m = 7$ )	40.8	12.0

とする．近似の精度を測るため，最大誤差  $E_{\max} = \max_j |f(j\Delta x) - f_j|$  を用いる．MATLAB 7.0.4 で数値実験を行う．表 1 に各近似手法の実験結果を示す．まず， $f'$ ， $f''$ ， $f'''$  の近似計算の結果を考察する．表 1 より基底関数の階数  $m$  が大きくなるにつれて精度が良くなる．また，ウェーブレットガラーキン法よりサポート幅が小さくても極めて精度が良い．有限差分法より精度が良い．次に， $ff'$ ， $ff''$ ， $ff'''$  の近似計算の結果を考察する．表 1 より，基底関数の階数が小さくなるにつれてごくわずかに精度が良くなる．また，ウェーブレットガラーキン法や有限差分法より数桁程度精度が悪い．

## 5 数値実験 2

1 階線形波動方程式 (20) の近似を (21) で行う．また，B スプラインガラーキン法とウェーブレットガラーキン法との近似精度を比較する．数値スキームの精度を測るために保存量

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)^2 dx \simeq \sum_j (u_j^n)^2 \Delta x \quad (24)$$

を考える．保存量の増減率  $E(t) = |I(t)/I(0) - 1|$  を誤差とし，これを精度評価に用いる．初期波形はガウシアンと三角波とする．空間幅は  $-50 \leq x \leq 50$  とする．空間刻み幅は  $\Delta x = 0.2$ ，

表 4: 数値爆発が発生するまでの時間  $t_{\text{発散}}$  ( $\Delta t = 0.001$ )

基底	$m_1 = 2$	$m_1 = 3$	$m_1 = 4$	$m_1 = 5$	$m_1 = 6$	$m_1 = 7$
$m_2 = 4$	179.8	166.0	162.3	159.9	158.3	156.9
$m_2 = 5$	135.3	126.5	122.1	120.1	118.9	117.8
$m_2 = 6$	106.4	107.2	102.0	99.8	98.5	97.5
$m_2 = 7$	90.9	97.2	90.4	87.9	86.4	85.4

時間刻み幅は  $\Delta t = 0.0001$  で行う． $|x| > 50$  に対しては  $u(x+100, t) = u(x, t)$  として周期境界条件をおく．このパラメータにおける数値実験結果を図 1, 表 2 に示す．図 1 に基底の階数が  $m = 2$  のときの結果を示す．図 1 (a) のように初期波形を三角波とする．理論的には形を変えず速度 1 で進み,  $t = 100$  では周期境界条件により図 1 (a) の初期波形が右から左に出てちょうど元の位置に戻る．図 1 (b) が結果である．初期波形と全く同じ形である．他の階数  $m$  の場合でも同じ結果を得る．有限差分法では尖った部分が丸みを帯びてくる．よって B スプラインガラーキン法は 1 階微分に不連続点がある場合でも有効である．表 2 に B スプラインガラーキン法とウェーブレットガラーキン法による保存量の増減率  $E(100)$  を示す．基底の階数  $m$  による違いはみられない．精度は同程度である．

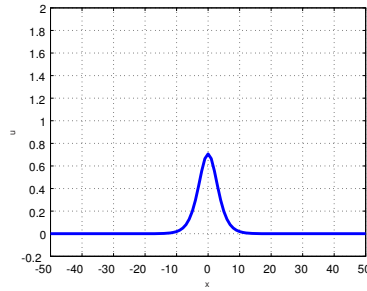
次に, 時間刻み幅を  $\Delta t = 0.01$  とし基底の階数  $m$  による精度の違いをみる．このパラメータにおいて数値実験を行うと比較的短い時間で数値爆発が発生する．したがって,  $E(t) > 10$  となる時間  $t$  を  $t_{\text{発散}}$  とし, 基底の各階数における  $t_{\text{発散}}$  を比較する．表 3 に各波形における  $t_{\text{発散}}$  を示す．基底の階数  $m$  が小さくなるほど精度は良い．

## 6 数値実験 3

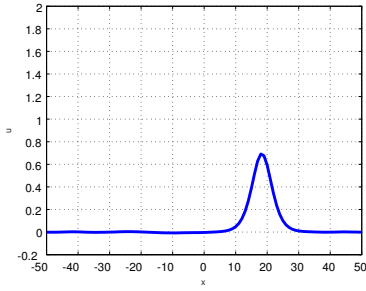
KdV 方程式 (22) の近似を数値スキーム (23) を用いて行う．数値実験 2 と同様に数値スキームの精度を測るために保存量 (24) を用いる．初期波形はソリトン解

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh^2 \left( \frac{x}{4} \right) \quad (25)$$

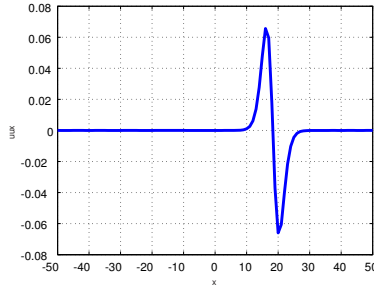
とする．空間幅は  $-50 \leq x \leq 50$  とする．空間刻み幅は  $\Delta x = 1$ , 時間刻み幅は  $\Delta t = 0.001$  で行う． $|x| > 50$  に対しては  $u(x+100, t) = u(x, t)$  として周期境界条件をおく． $m_1 = 2, m_2 = 4$  のときの波形の変化を図 2 に示す．図 2 (a) を初期波形とする． $t = 80$  のときの波形は図 2 (b) である．波は形を変えず進む．このときの  $uu_x$  と  $u_{xxx}$  の波形を図 2 (c), (d) に示す．誤差はほとんどみられない．しかし, これ以降に波は崩れ始め,  $t = 179$  の波形は図 2 (e) のようになる．このときの  $uu_x$  と  $u_{xxx}$  の波形は図 2 (f), (g) である． $u_{xxx}$  の項により多く誤差が含まれる．そして  $t = 180$  で数値爆発を起こす．他の基底の階数で数値実験を行う場合も比較的短い時間で数値爆発が発生する．したがって, 保存量の増減率が  $E(t) > 1$  となるときの時間  $t$  を  $t_{\text{発散}}$  とし基底の階数  $m_1, m_2$  を変えたときの  $t_{\text{発散}}$  を比較する．表 4 に結果を示す．基底の階数  $m_1, m_2$  が低いほど精度が良い．



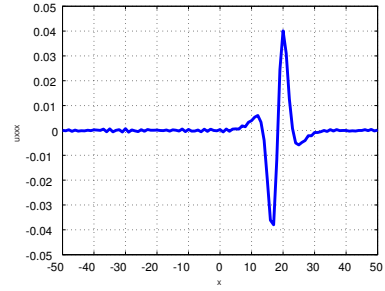
(a)  $u(x, 0)$  の波形



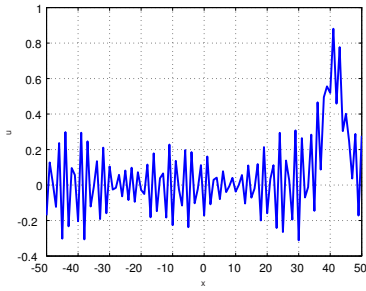
(b)  $u(x, 80)$  の波形



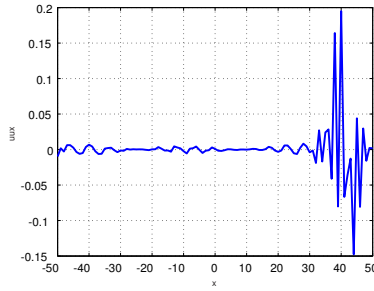
(c)  $uu_x(x, 80)$  の波形



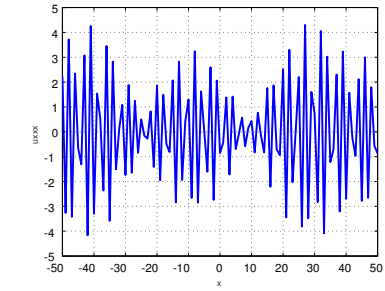
(d)  $u_{xxx}(x, 80)$  の波形



(e)  $u(x, 179)$  の波形



(f)  $uu_x(x, 179)$  の波形



(g)  $u_{xxx}(x, 179)$  の波形

図 2: 波形の変化 ( $\Delta t = 0.001$ ,  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 4$ )

次に,  $\Delta t = 0.0001$  とし時間刻み幅を小さくしたときの精度  $E(t)$  を比較する. 表 5 に結果を示す. 基底の階数  $m_1, m_2$  による違いはみられない. また,  $t = 500$  のとき  $u(x, 500)$  の波形は崩れていないがその後に波形は  $t = 909$  ( $m_1 = 2, m_2 = 7$  のとき) で発散する.  $\Delta t = 0.001$  のときと比較すると刻み幅に反比例して精度は良くなる. 他の基底の階数の場合でも同様の結果が得られる.  $\Delta t = 0.001$  のときは計算時間が約 10 分から 20 分であるが,  $\Delta t = 0.0001$  のときは約 4 時間から 8 時間かかる. さらに刻み幅を小さくすると計算精度は上がるが膨大な計算時間が必要となり非効率である.

ここで, 数値爆発の原因を考察する. 図 3 (a) に B スプラインガラーキン法による初期波形の  $u_{xxx}$  の近似波形を示す. 境界条件による波形のつなぎ目が  $x = 0$  であり, この点で  $u_{xxx}$  の不連続性が生じる. この点のまわりの真値は  $\delta'(\pm 0)$  である. B スプラインガラーキン法は不連続点の検出に優れているため, この不連続性も正確に近似する. また, 基底の階数を大きくするにつれて精度は高くなる. この誤差が数ステップ後には図 3 (b) のように伝播することになる. 初期誤差は図 3 ではスケールが  $10^{-10}$  と極めて小さいが, 時間発展とともに増加し



表 5: 保存量の誤差  $E(500)$  ( $\Delta t = 0.0001$ )

基底	$m_1 = 2$	$m_1 = 3$	$m_1 = 4$	$m_1 = 5$	$m_1 = 6$	$m_1 = 7$
$m_2 = 4$	$5.3 \times 10^{-4}$	$7.1 \times 10^{-4}$	$8.1 \times 10^{-4}$	$8.4 \times 10^{-4}$	$7.8 \times 10^{-4}$	$6.5 \times 10^{-4}$
$m_2 = 5$	$5.3 \times 10^{-4}$	$7.1 \times 10^{-4}$	$8.1 \times 10^{-4}$	$8.4 \times 10^{-4}$	$7.8 \times 10^{-4}$	$6.5 \times 10^{-4}$
$m_2 = 6$	$5.3 \times 10^{-4}$	$7.1 \times 10^{-4}$	$8.1 \times 10^{-4}$	$8.4 \times 10^{-4}$	$7.8 \times 10^{-4}$	$6.5 \times 10^{-4}$
$m_2 = 7$	$5.3 \times 10^{-4}$	$7.1 \times 10^{-4}$	$8.1 \times 10^{-4}$	$8.4 \times 10^{-4}$	$7.8 \times 10^{-4}$	$6.5 \times 10^{-4}$

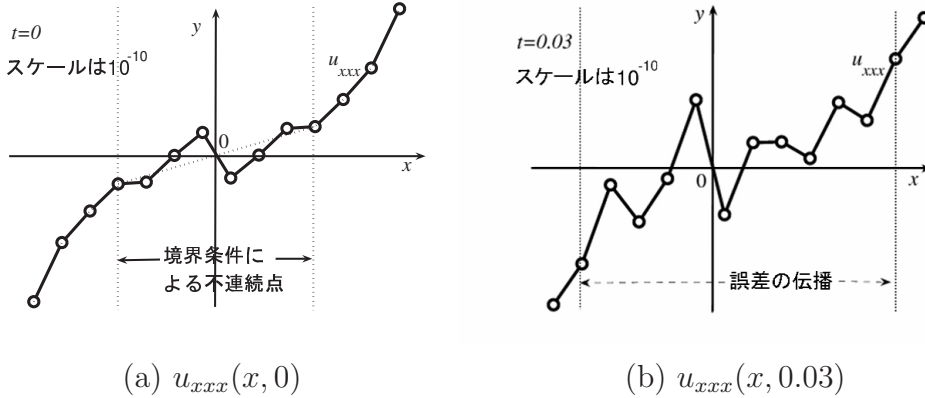


図 3: 分散項  $u_{xxx}$  における誤差の発生と伝播

数値爆発を引き起こす．基底の階数が大きいほど精度は高く不連続性も高くなるため，数値爆発を引き起こす時間が短くなる．一方，有限差分法では空間方向の近似が悪いため，不連続点に起因する数値爆発は発生しにくい．

分散項  $u_{xxx}$  にアダムス・バッシュフォース法 (c.f [8, p.179]) を適用し不連続性を軽減するスキームを考える．(23) に適用すると数値スキーム

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) A_{m_1}^{-1} \mathbf{b}_{m_1}(\mathbf{u}^n) - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x^3} \right) (2A_{m_2}^{-1} B_{m_2}^{(3)} \mathbf{u}^n - A_{m_2}^{-1} B_{m_2}^{(3)} \mathbf{u}^{n-1}) \quad (26)$$

が得られる．数値スキーム (26) を用いて同様に実験を行う．空間刻み幅は  $\Delta x = 1$ ，時間刻み幅は  $\Delta t = 0.001$  で行う． $m_1 = 2$ ， $m_2 = 4$  のときの  $t = 500$  における波形を図 4 に示す． $u(x, 500)$ ， $uu_x(x, 500)$ ， $u_{xxx}(x, 500)$  の全てにおいて波形の崩れが見られない．また  $t = 4600$  でも波形は全く崩れない．これ以後も波形は崩れずに進むと考えられる．アダムス・バッシュフォース法を適用することで不連続点による誤差がうまくキャンセルされる．表 6 には各基底の階数  $m_1$ ， $m_2$  での  $E(500)$  を示す．基底の階数  $m_1$ ， $m_2$  による違いはみられない．保存量は表 5 と比べると約 1 桁悪い．しかし，計算時間は約 10 分から 20 分と効率は良い．

## 7 まとめ

B スプラインガラーキン法は導関数の近似において他のウェーブレット基底や有限差分法よりも精度が良い．基底の階数が大きくサポート幅が大きいほど精度が良い．他のウェーブレッ

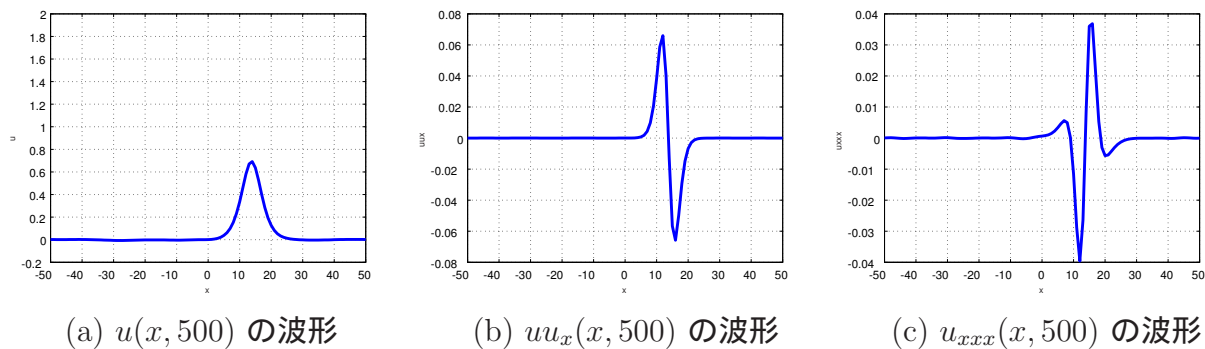


図 4: アダムス・バッシュフォース法を適用したときの波形の変化 ( $\Delta t=0.001$ ,  $m_1=2$ ,  $m_2=7$ )

表 6: アダムス・バッシュフォース法を適用したときの保存量の誤差  $E(500)$  ( $\Delta t = 0.001$ )

基底	$m_1 = 2$	$m_1 = 3$	$m_1 = 4$	$m_1 = 5$	$m_1 = 6$	$m_1 = 7$
$m_2 = 4$	$2.3 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$
$m_2 = 5$	$2.3 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$
$m_2 = 6$	$2.3 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$
$m_2 = 7$	$2.3 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-3}$

ト基底においても同じ特徴がある．しかし，B スプラインガラーキン法は他のウェーブレット基底と比べると同じサポート幅でもよりよい精度が得られる．これは同じサポート幅に対して正則性が高いためである．よって，導関数の近似においては基底関数の正則性が重要であるという結果を得た．一方，微分方程式の数値解法においては逆の結果を得た．基底の階数は小さくなるほど精度が良くなる．なぜなら，各時間ステップにおける空間方向の近似は基底の階数が大きいくほど良い．初期波形の周期境界条件によるつなぎ目までも忠実に再現してしまう．時間微分をオイラー差分で近似すると各ステップごとにこの誤差を増幅することになる．その結果，数値爆発を引き起こす．したがって，不連続点の近似精度が低い方が良いという結果となる．例えば，有限差分法では不連続点は再現不可能であり比較的数値安定となる．B スプラインガラーキン法では逆に不連続点の検出に優れているため誤差が積もり数値爆発を引き起こす．よって，今後の課題としては時間方向も基底展開した数値スキームを考案することである．

## 参考文献

- [1] G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin, Fast wavelet transforms numerical algorithms I, Commun. Pure. Appl. Math. **44** (1991), 141–183.
- [2] G. Beylkin, On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets, SIAM J. Numer. Anal. **6** (1992), 1718–1740.

- [3] G. Beylkin, 微分方程式解法のためのウェーブレットに基づくアルゴリズム, 450–465; J. J. Benedetto, M. W. Frazier 編, ウェーブレット理論と応用, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.
- [4] G. Beylkin and J. M. Keiser, A new class of time discretization schemes for the solution of nonlinear PDEs, J. Comp. Phys. **147** (1998), 362–387.
- [5] G. Beylkin and J. M. Keiser, On the adaptive numerical solution of nonlinear partial differential equations in wavelet bases, J. Comp. Phys. **132** (1997), 233–259.
- [6] K. Fritz, Wavelets and Multiwavelets, A CRC Press, 2004.
- [7] A. Latto, H. L. Resnikoff, and E. Tenenbaum, The evaluation of connection coefficients of compactly supported wavelets, USA workshop on Wavelets and Tubulence, Princeton Univ., Springer-Verlag, 1992.
- [8] 水島二郎, 柳瀬眞一郎, 理工学のための数値計算法, 数理工学社, 2002.
- [9] 榊原進, ウェーブレットビギナーズガイド, 東京電機大学出版局, 1995.
- [10] 中野宏毅, 山本鎮男, ウェーブレットによる信号処理と画像処理, 共立出版, 1999.