応用力学研究所研究集会報告 No.18SP1-4
「海洋巨大波の実態と成因の解明・第２回」（研究代表者　冨田宏）

Reports of RIAM Symposium No.18SP1-4

Study on features and generation mechanisms of freak waves II

Proceedings of a symposium held at Research Institute for Applied Mechanics,
Kyushu Universiy, Kasuga, Fukuoka, Japan, March 9 - 10, 2007

Article No. 08

フリーク波の生成理論の現状と問題

冨田 宏（TOMITA Hiroshi），水谷 由宏（MIZUTANI Yoshihiro）

（Received June 1, 2007）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
July, 2007

フリーク波の生成理論の現状と問題

上智大学理工学部　冨田　宏（TOMITA Hiroshi）†
上智大学理工学部　水谷由宏（MIZUGAI Yoshihiro）
†：元・海上技術安全研究所

概要

フリーク波の生成機構を解明する上での要点は、この種の異常波浪が突発的に現れる点にある。すなわち最大波は孤立しており、その前後の波に対しても２倍から３倍の波高を有する。この事実そのものが波動の非線形効果の影響を示唆する。ここでは３次の非線形を考慮した２つの簡単な生成機構のモデルについて述べている。

1 緒言

フリーク波とは海洋波浪の中に現れる一種の異常波浪で、この波に遭遇した船舶や海洋構造物に致命的な損害を与えるものと考えられ、ハリウッド映画「ポセイドン」や「パーフェクトストーム」にも登場して広く知られるところとなっている。現時点での学術的な定義としては「およそ 20 分間の観測から得られた有義波高（ある種の平均波高）の 2 倍以上の波高を持つ最大波（$H_{\max}/H_s > 2$）」が採用されている。フリーク波の研究はおおよそ 1980 年代前半に遡るものと思われる。その当時まで海洋波浪の研究は一方ではランダム現象の典型的なものとして統計的接近が行われ、他方個々の波の与える波浪荷重や非線形効果等については主に単一の規則波として取り扱われてきた。従って、不規則波中に現れる突発的ないし孤立的大波高波と言うようなものは直接の科学的研究対象となり難かったのは当然のなりゆきである。勿論この様な異常波浪についてはそれ以前から多くの研究者や観察者によって言及されており特に海員の間では「一発大波」、「三角波（Pyramidal Wave）」等の呼称で何世紀も前から知られかつ恐れられてきた。それにも関わらず一般に異常波は目撃者の主観的報告、伝承の域を出ず、該当する波浪の信頼性のある計測等十分な科学的根拠を欠いていたためごく最近まで近代科学の恩恵に浴することが少なかったと言えよう。このような状況を突如覆し、この現象に科学者の目を向けさせたのは 1991 年 1 月 1 日にノルウェー沿岸の北海に設置された Draupner Site で観測された New Year Wave（図 1）である。これは down-looking laser sensor によって得られた信頼度の高い記録で、約 12m の有義波高の中に突発的に 26m の孤立した大波

が現れている。その後この様な現象は日本海や北太平洋を含む世界各地で続々と観測され、近年海洋学、海洋工学研究者の強い興味をひきつけている。

2 水面波の非線形理論

水面波の研究は流体力学の中でも最も古典に属する分野である。波の線形理論は非粘性、非圧縮そして渦無しの条件が期待できるので解は速度ポテンシャルから導くことが出来る。そのため早くから工学的応用に供され波浪中の船体運動理論等複雑な形状の物体まわりの流れと波浪応答、波浪荷重の推定に有効な道具として用いられてきた。しかし一端波高の大きな波（有限振幅波）について研究しようとすると水面は移動境界となり、境界条件にも基礎方程式に含まれる非線形項の影響が現れてくるので問題は極めて難しくなる。深水波に限って言えば、前世紀中葉までに得られていた主な成果は重力波、表面張力波が定常に進行する場合の解のみで、各々 Stokes 波、Crapper 波と呼ばれているものである。一方、浅水波については当初から厳密解が望めないことが分かっていたので、水深、波長、波高の諸量をパラメータとしてそれらの大小関係から摂動法によって新しいモデル方程式を導き出す試みが早くからなされており、非線形偏微分方程式である Korteweg-deVries 方程式とその定常解であるクノイダル波や孤立波の存在が知られていた。しかしこの系統の研究はかなり特殊な興味によるものと見られ、Plandtl に代表される近代流体力学の発展期には長く人々の興味を惹くことがなかった。

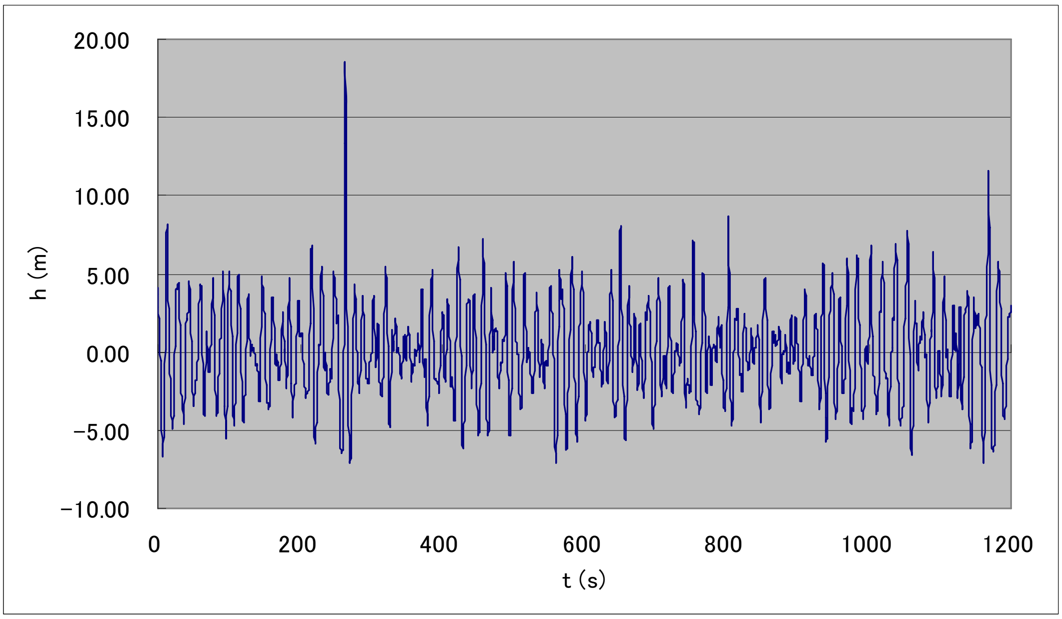

図 1　Draupner Site におけるフリーク波

事情が一気に変わるのは次の２つの研究による。第１に Zabusky-Kruskal[14]

らの行った数値実験による KdV 方程式のソリトン解の発見、第２に Gardner-Greene-Kruskal-Miura[4]による KdV 方程式の厳密解法の発見である。前者は非線形偏微分方程式の特解が線形問題における Fourier 成分の役割を果たすこと、非線形波動に特有の伝播速度の振幅分散性を示すこと、さらに一般にＮ個のソリトンを含む解（Ｎ－ソリトン解）が解析的に求められ、しかも各々は衝突してもその性質を保存するという意味で一種の重ね合わせが可能であることを明らかにした。また後者では逆散乱法と呼ばれる線形変換によって非線形方程式の任意の初期値問題が厳密に解かれることを示しており、ともに物理学の常識を覆す画期的な成果であった。のみならずそれに続く 10 年間ほどの間にこのような性質をもつ非線形偏微分方程式が単に浅水波という水力学の特定分野のみならず海洋波動、渦力学、管内流等、流体力学の多くの分野さらに物性物理学、プラズマ波動、レーザ光学から火山学にいたる自然現象の多くの分野で存在することが明らかにされ、一群の方程式は現在ではソリトン方程式と呼ばれている。本論に関係が深いものとしては深水重力波のエンベロープを支配する Non-linear Schroedinger（NLS）方程式、それを３次元に拡張した Davey-Stewartson 方程式、また内部波に関する Benjamin-Ono 方程式、Gardner 方程式等が知られている。これら多くのソリトン方程式（非線形偏微分方程式）の厳密解を求める拡張された逆散乱変換法（IST）については Ablowitz & Segur[1]による水面波への応用も含めた美しいモノグラフがある。この様なこれまで比較的基礎的かつ純理論的と考えられてきた研究が フリーク波等海洋に生起する巨大波浪の解明に非常に重要な役割を演じる可能性が生じてきたことが近年の特に欧米における巨大波研究の隆盛につながっていると言えないこともないであろう。

3 フリーク波の発生機構と理論モデル

3‐１NLS 方程式とソリトン

海洋波の非線形モデルとして前節に言及した NLS 方程式とそのソリトン解について調べておく。無次元化した方程式（方程式の係数には本質的な意味は無い。但し、第２項と第３項の係数が同符合の場合は自己収束型、異符号の場合は非収束型と呼び異なる性質の解を有する。本論文では前者の場合のみを扱う）を

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0 \qquad (1)$$

と書いてその定常波解を求める。先ず変調のない場合は自明な解として $q = q_0 e^{2iq_0^2 t}$（Stokes 波）が求まる。

次の段階で、定常な振幅変調を許すとして $q=\tilde{q}(x)e^{iq_0^2 t}$ を代入すると

$$-q_0^2\tilde{q}+\tilde{q}_{xx}+2\tilde{q}^3=0 \tag{2}$$

を得る。これは 2 階の常微分方程式なので 1 回積分して積分定数を 0 とし、

$$\left(\tilde{q}_x\right)^2=q_0^2\tilde{q}^2-\tilde{q}^4 \tag{3}$$

平方根の負号を採用すると $\tilde{q}_x=-\tilde{q}\sqrt{q_0^2-\tilde{q}^2}$ から $\dfrac{-d\tilde{q}}{\tilde{q}\sqrt{q_0^2-\tilde{q}^2}}=dx$

ここで、$y=\dfrac{\tilde{q}}{q_0}$ とおいて $\dfrac{-dy}{y\sqrt{1-y^2}}=q_0dx$ となるから、

左辺の積分を実行するために $y=\dfrac{1}{t}$ と変換すると $\dfrac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=q_0dx$ を得る。

これは初等関数を使って $\cosh^{-1}t=q_0x$ すなわち

$$\tilde{q}=q_0\frac{1}{\cosh\left[q_0x\right]}=q_0\,\mathrm{sec}\,h\left[q_0x\right] \tag{4}$$

となってソリトン解が求まる。深水波のエンベロープソリトンの伝播する様子を水面での厳密な境界条件を考慮した境界積分方程式法（BIE）で計算した例を図 2 に示す[11]。

この解は KdV 方程式のソリトンと異なり、次のように波高と速度が独立に決められる。すなわちこの解には非線形現象に特有の振幅分散性がない。

$$\tilde{q}=q_0\frac{e^{i\left(\frac{V}{2}x-\frac{V^2}{4}t\right)}}{\cosh\left[q_0\left(x-Vt\right)\right]} \tag{4+}$$

ここで重要なことはこの解を海洋波のエンベロープと解釈する時、速度因子は非常に小さくなければならない点である。そのため逆散乱法で求められた N－ソリトン解を長さの異なる複数の波群と見た場合、それらは相対速度が小さいため拘束ソリトンと呼ばれ、衝突に際して強い相互作用を行うことが想定される。さらに KdV ソリトンが衝突に際してその振幅を減じるのに対して NLS ソリトンでは振幅の大幅な増幅が生じる点に特徴がある。このような拘束ソリトンの時間的発展の極限を２－ソリトンの場合について図 3 に示す。現実の海洋にしばしば現れるうねりの波群が突発的な巨大波を形成する様子が明らかに再現されている。

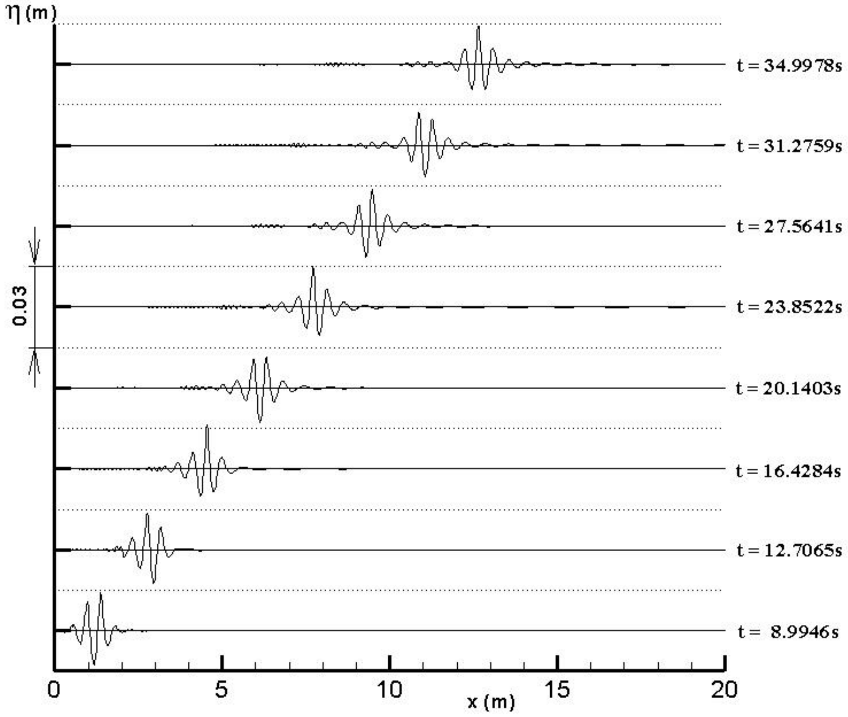

図２　数値水槽上を伝播するエンベロープソリトン

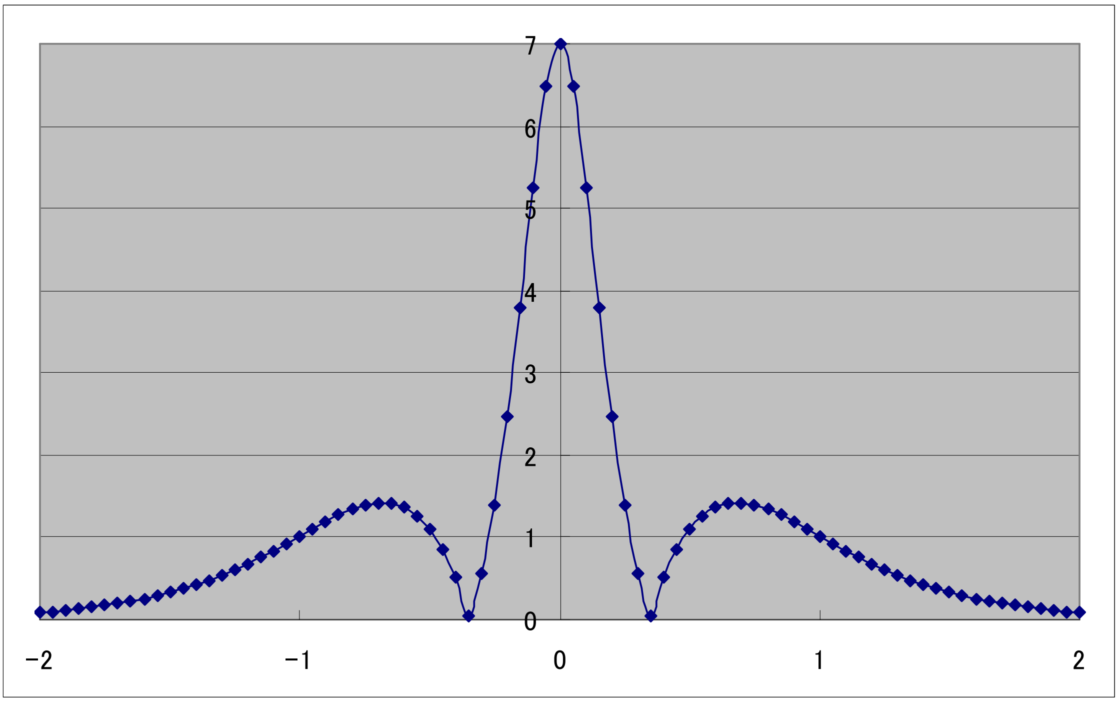

図３　拘束ソリトンの相互作用

３－２波の不安定性と **NLS** 方程式

よく知られているように、水面上を伝播する規則波はその非線形性のために不安定である。例えば水槽内に造波された波は長くその性質を保ち得ない。これを解析した線形不安定性理論は Benjamin-Feir [3]によって初めて与えられた。しかし、同一の結果は非線形不安定理論からも次のように導かれる。

NLS 方程式を有次元で書いて、

$$i\phi_t + \mu\phi_{xx} + \nu|\phi|^2\phi = 0 \tag{5}$$

ストークス波の解は　$\phi = \phi_0 e^{i\alpha t}$　$\alpha = \nu\phi_0^2$　と求められる。この解に小さな擾乱を付け加えて、$\phi = (\phi_0 + \varepsilon\varphi)e^{i(\alpha t + \varepsilon\vartheta)}$　とする。これを原方程式に代入し、ε　の項まで残せば線形安定性理論と合致するはずである。

$$i\phi_t = \left[\varepsilon i\varphi_t - \left(\phi_0\alpha + \varepsilon\phi_0\vartheta_t + \varepsilon\varphi\alpha + O(\varepsilon^2)\right)\right]e^{i(\alpha t + \varepsilon\vartheta)}$$

$$\mu\phi_{xx} = \mu\left[\varepsilon\varphi_{xx} + \varepsilon i\phi_0\vartheta_{xx} + O(\varepsilon^2)\right]e^{i(\alpha t + \varepsilon\vartheta)} \tag{6}$$

$$\nu|\phi|^2\phi = \nu\left[\phi_0^3 + 3\varepsilon\phi_0^2\varphi + O(\varepsilon^2)\right]e^{i(\alpha t + \varepsilon\vartheta)}$$

これらから NLS 方程式を組み上げれば（指数項を無視して）

$$\left[-\phi_0\alpha + \nu\phi_0^3\right] + \varepsilon\left[i(\varphi_t + \mu\phi_0\vartheta_{xx}) - \left(\phi_0\vartheta_t + \varphi\alpha - \mu\varphi_{xx} - 3\nu\phi_0^2\varphi\right)\right] = 0 \tag{7}$$

第 1 項はそのままで 0 である。残りの 2 つの項を 0 と置くと、

$$\varphi_t + \mu\phi_0\vartheta_{xx} = 0$$

$$\phi_0\vartheta_t - \mu\varphi_{xx} - 2\nu\phi_0^2\varphi = 0 \tag{8}$$

なる連立方程式を得る。これの解を　$\varphi = \hat{\varphi}\cos(kx - \omega t),\ \ \vartheta = \hat{\vartheta}\sin(kx - \omega t)$　と置けば、決定方程式は

$$\begin{gathered}\omega\hat{\varphi} - \mu\phi_0 k^2\hat{\vartheta} = 0\\ \left(\mu k^2 - 2\nu\phi_0^2\right)\hat{\varphi} - \omega\phi_0\hat{\vartheta} = 0\end{gathered} \tag{9}$$

従って、分散関係は

$$\omega^2 = \mu^2 k^2\left(k^2 - \frac{2\nu}{\mu}\phi_0^2\right) \tag{10}$$

となり、括弧内が負の場合、ωは擾乱の成長率を与える純虚数となり、ストークス波は不安定である。これは線形安定性理論による結果と一致する。

３－３不安定波の発展からフリーク波 へ

非線形不安定性理論によれば、初期に指数的に崩壊した波列はそのまま乱流に移行するのではなく、NLS 方程式に従ってより安定な解に発展する。これらはブリザー解あるいは SFB（Soliton on Finite Background）と呼ばれる特殊な解の一族であり、Akhmediev et al.[2] によって詳しく調べられている。この解は時間空間的に非定常な性質を有し、楕円関数を含む有理型関数で表される。特に（10）で示した成長率が最大の場合には解法は全て初等関数の範囲で記述できるので、下にその導き出しを示しておく。

$$iq_t+\frac{1}{2}q_{xx}+|q|^2 q=0 \tag{11}$$

の解を　$q=u(x,t)e^{it}$　と置くと

$$iu_t+\frac{1}{2}u_{xx}-u+|u|^2 u=0 \tag{12}$$

を得る。ここで複素数値関数を実部と虚部に分けて　$u=v+iw$　と書くと実数値関数について２つの方程式

$$v_t-w+\frac{1}{2}w_{xx}+\left(v^2+w^2\right)w=0,\quad -w_t-v+\frac{1}{2}v_{xx}+\left(v^2+w^2\right)v=0 \tag{13}$$

に分かれる。ここで更に２つの関数の間に　$v(x,t)=\eta(t)w(x,t)+\mu(t)$　という

関係を仮定する。ここでは簡単のため　$\eta=\mu=-\tanh(t)$　の場合に限定する。

(13)の２つの式から各々vを消去し、得られた２つの式からw_{xx}を消去すると

$$w_t+\left(w^2+w\right)\tanh(t)=0 \tag{14}$$

なる Bernoulli の方程式を得る。

この方程式の解は簡単に$w=\dfrac{C(x)}{\cosh(t)-C(x)}$となることが分かる。この結果から

$$v=-w\tanh t-\tanh t=\frac{-\sinh t}{\cosh t-C} \tag{15}$$

なる表式が導かれる。vを（13）の２つの式のどちらかに代入すると、

$$C_{xx}+\frac{2C_x^2}{\cosh(t)-C}-2\frac{1-C^2-C\cosh(t)}{\cosh(t)-C}=0 \qquad (16)$$

この方程式が任意の時間に成立するための条件は　$C_x^2=1-2C^2$　なのでこれは簡単に解けて、$C=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}x$　となり、これらの結果を全て集めると、結局非定常解

$$q=e^{it}\frac{-\sqrt{2}\sinh(t)+i\cos\sqrt{2}x}{\sqrt{2}\cosh(t)-\cos\sqrt{2}x} \qquad (17)$$

を得る。これが最も簡単なブリザー解である。この種のソリトンが突発的な巨大波を発生する様子を図４に見ることが出来る。またこれは１次元波動のなかでは最も安定で存在する可能性の高い解でもある。この形のブリザー解は実際に水槽中でも発現が確認されている[11]。波形の一例を図５に示す。

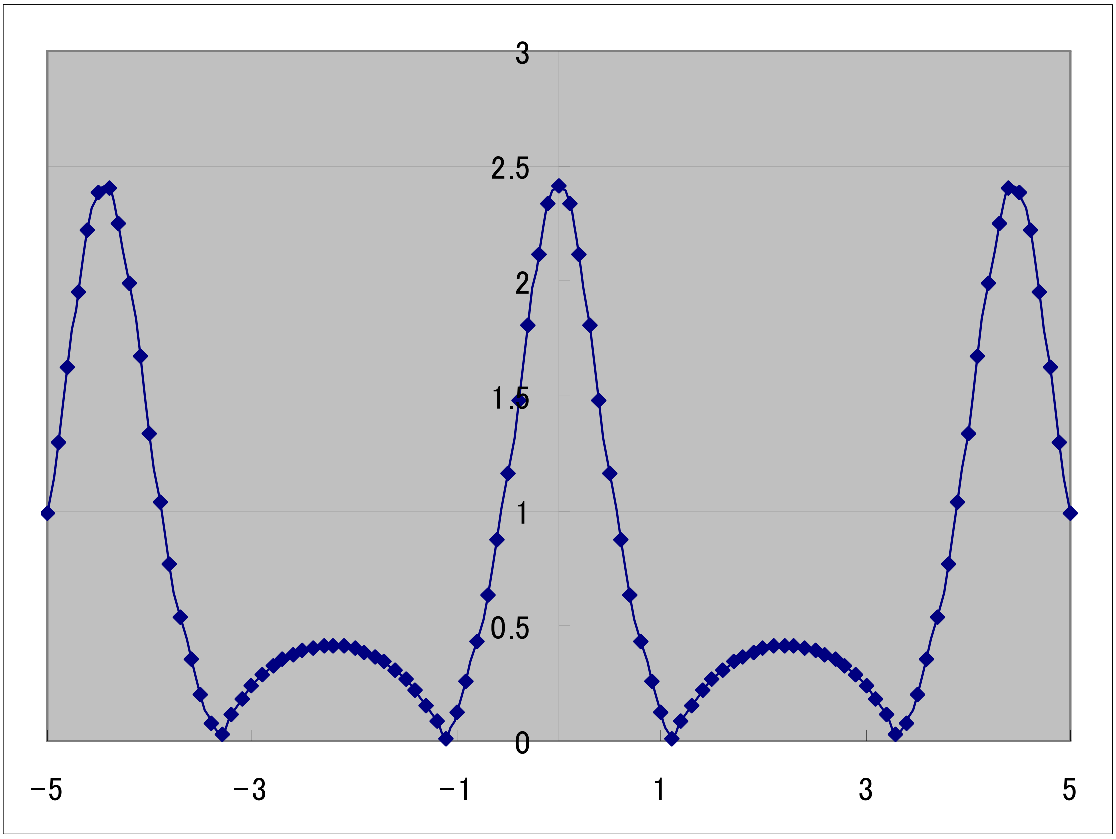

図４　式（17）によるブリザー・エンベロープ
（$t\to\pm\infty$　では $q=1$ である）

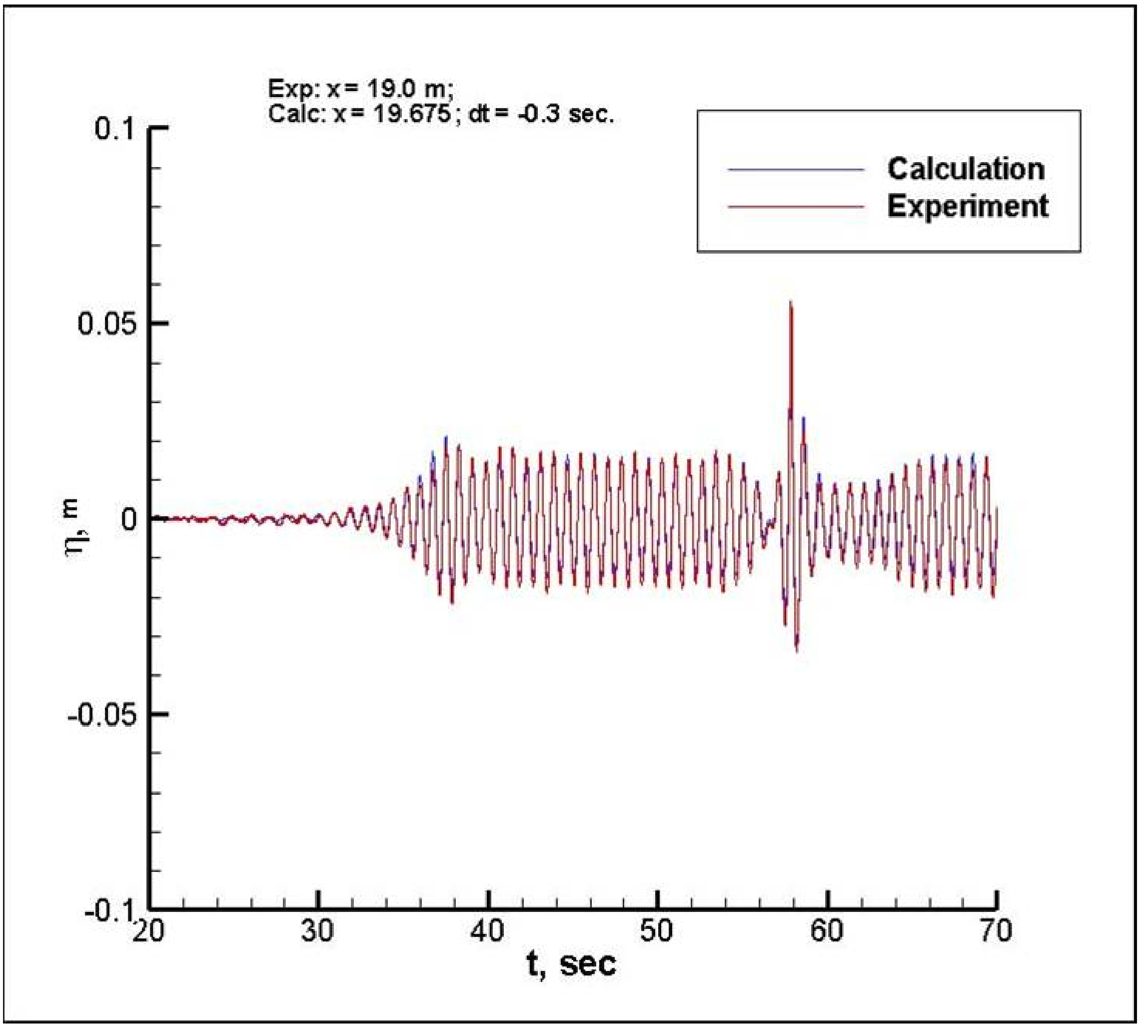

図５　水槽に造波されたブリザーと理論計算値の比較

実海域でのデータと比較して、これはフリーク波のモデルとして有力なものと考えられている。一般的な波浪場の中でのこの様な不安定モードの位置づけについて Osborne 等は NLS 方程式の周期条件下での逆散乱法(IST,逆スペクトル)による研究を行っている[6][7][8]。このアルゴリズムが使えるようになれば観測されたランダムな波浪場の中からフリーク波を認識することも可能になると思われる。ちなみに規則波列が周辺のランダム波によって孤立した大波高を生起する様子をシミュレーションした結果の一例を図６に見ることができる[11]。

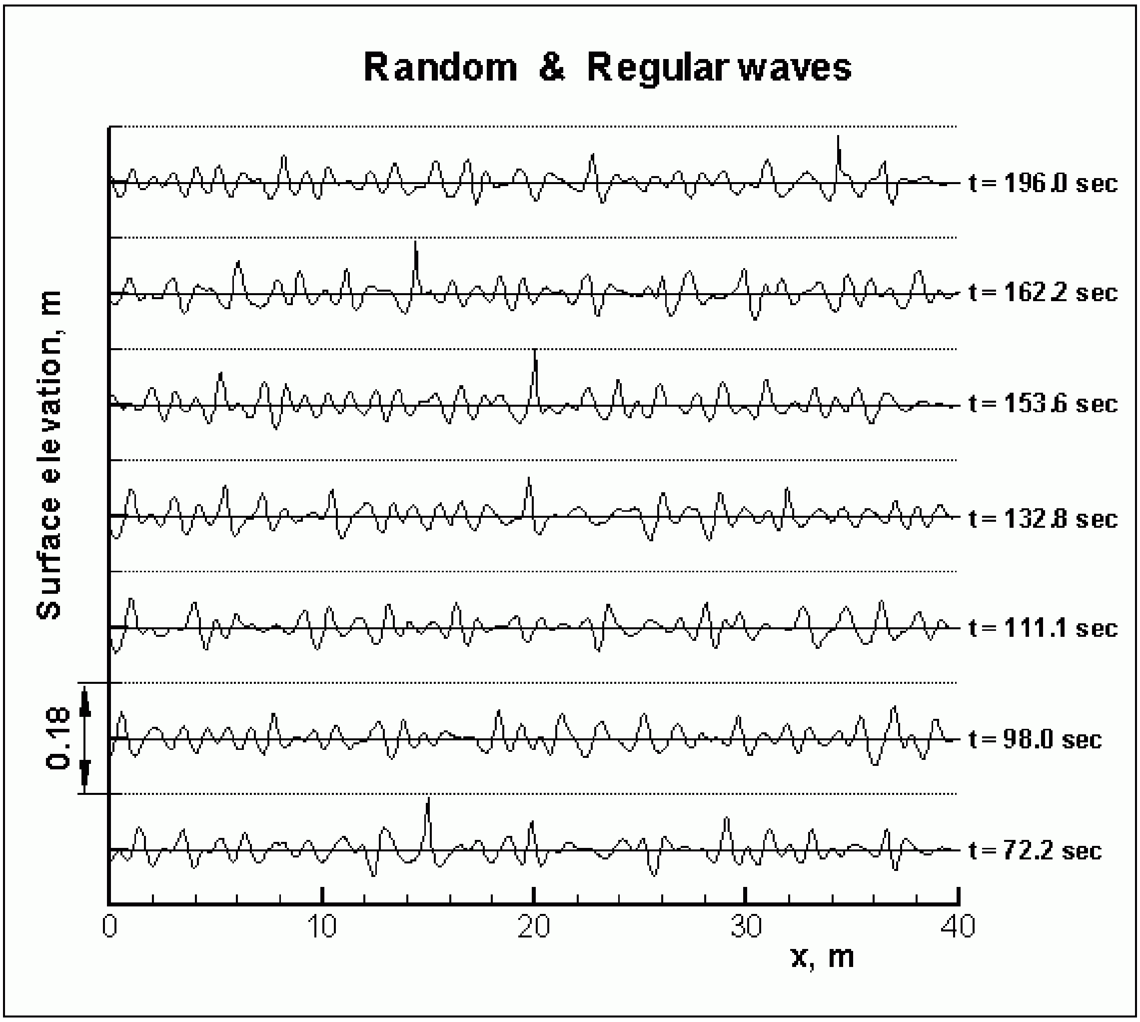

図 6　ランダム波中でのフリーク波の出現

4 海洋波浪の方向分散性と残された問題

海洋科学・工学としての波浪の研究には実地観測データの取得と解析[9]、[12]、水槽実験[13]、数値シミュレーション等多方面からの対象への接近が必要である。海洋波浪の標準スペクトル（JONSWAP）と 4 波相互作用については Zakharov 方程式に準拠した Janssen[5]による包括的な研究があるが、これも 1 次元の場合に限定されている。本論ではそのうち主に理論的側面からの研究に的を絞り、筆者ならびにそのグループおよびヨーロッパ諸国の研究動向と最近までの成果について概観した。そこでは特に純粋数学の知識や技法がそのまま現実の自然・地球物理現象に役立つ様子をご紹介した。もちろんそのためには現象に対する過度の単純化等不十分な点も多々指摘されている。例えば現実の海面では風の影響の下で波崩れが頻繁に見られるが、このような状況は現在の数学では解明することが困難である。さらに、最近当該分野の研究者の課題として指摘されているものに海洋波の方向分散性の問題がある。方向分散は進行

する波の峰が波長に比べて十分には長くないという事実である。この効果は理論の摂動として考慮できるとこれまで考えられてきたが、最近の実験では結果にかなりの影響を及ぼすのではないかとの意見も現れている[10]。実海域での計測データから方向分散性を知ることは通常の波浪計測装置では困難であり、実験水槽や数値シミュレーションでも 2 次元空間の現象を追及するのは容易ではない。波浪場の 2 次元的観測を可能にするためには人工衛星を利用したマイクロ波リモートセンシングの活用と異常波浪発生時のスペクトルパラメータの同定等がこれらの異常波浪の予測と回避のためには将来的に重要となる。フリーク波の理解がかなり進んできた現時点が更に一歩の breakthrough に向けて踏み出す機会ではないかと考えられる。

５結語

大洋中に忽然と現れる大規模波浪、特にその突発性と孤立性によって船舶や海洋構造物に甚大な被害を与えると言われているフリーク波の研究の歴史と現状、筆者等の研究成果の一部ならびに将来における研究と実用化に向けての構想について述べた。

ここで扱われるような海洋学的研究が海洋波浪の統計とその異常の解明という課題を介して水力学の一分野である水面波の研究と深く結びついていることを示した。この様な研究を通して実際的課題に対して基礎研究の結果を直接活用（例えば IST 等の純粋数学的理論と海洋大規模波浪の予測という、優れて実用的観点）することの重要さを認識し、さらには海洋空間利用の推進に対する水力学・応用数学分野からの貢献のひとつの端緒を得ることが出来れば幸いである。

本研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金（基盤研究 A16206087）によるものである。

参考文献：

[1]Ablowitz, M. J. and Segur, H., "*Solitons and the inverse scattering transform*", SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1981

[2]Akhmediev, N.N., Eleonskii, V.M. and Kulagin, N.E., "Exact first-order solutions of the nonlinear Schroedinger Equation", Theoretical Mathematics and Physics (USSR), 72, (1987), 809-818

[3]Benjamin, T.B. and Feir, J.E., The disintegration of wave trains on deep water Part1 Theory, Journal of Fluid Mechanics, 27, (1967), 417-430

[4]Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. and Miura, R. M., Korteweg-deVries equation and generalizations, Communications on Pure Applied Mathematics, 27, (1974)

[5]Janssen, P.A.E.M., Nonlinear four-wave interactions and freak waves, Journal of Physical Oceanography, 33, (2003), 863-884
[6]Osborne, A.R., The random and deterministic dynamics of 'rogue waves 'in unidirectional, deep-water wave trains, Marine Structures, 14, (2001), 275-293
[7]Osborne, A.R., Onorato, M. and Serio, M., The nonlinear dynamics of rogue waves and holes deep-water gravity-wave trains, Physics Letters, A275,(2000), 386-393
[8]Osborne, A.R., Onorato, M., Serio, M. and Resio, D.T., Nonlinear Fourier analysis of deep-water, random wave trains, 8th International Workshop on Wave Hindcasting and Forecasting(edited by Peter Mueller), Oahu, 2004, 1-11
[9]Stansell, P., Distributions of freak wave heights measured in the North Sea, Applied Ocean Research, 26, (2004), 35-48
[10]田中光宏, 海洋波スペクトルの短時間発展における共鳴相互作用の役割、および freak　wave の出現確率と非線形性の関連について, 海洋巨大波の実態と成因の解明(冨田宏編), 九州大学応用力学研究所研究集会 No.17SP1-2, 福岡, 2006, 23-40, http://www.riam.kyushu-u.ac.jp/fluid/meeting/17SP1-2/
[11]Ten, I. K. and Tomita, H., Creation and annihilation of extremely steep transient wave, ISOPE2005, Seoul, 2005
[12]Tomita, H. and Waseda, T., Note on the appearance of freak waves from in-situ ocean wave data, Annual Conference & International Workshops, The 20th Anniversary of the Korean Society of Ocean Engineers, Busan, 2006, 105-112
[13]Waseda, T., Impact of directionality on the extreme wave occurrence in a discrete random wave system, 9th International Workshop on Wave Hindcasting and Forecasting, Victoria, 2006
[14]Zabusky, N. J. and Kruskal, M. D., Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Physical Review Letters, 15, (1965), 240-243