応用力学研究所研究集会報告 No.19ME-S2
「戸田格子 40 周年　非線形波動研究の歩みと展望」（研究代表者　西成 活裕）

Reports of RIAM Symposium No.19ME-S2

40 years Anniversary of Toda lattice - history and perspective of nonlinear wave research

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 7 - 9, 2007

Article No. 3

E 型アフィンワイル群対称性を持つ加法的離散 Painlevé 方程式の超幾何解

梶原 健司（KAJIWARA Kenji）

（Received January 28, 2008）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
April, 2008

E 型アフィンワイル群対称性を持つ加法的離散 **Painlevé** 方程式の超幾何解

九州大学大学院数理学研究院　梶原 健司　(Kenji Kajiwara)

概要

Sakai によって分類された 2 階の Painlevé 系のうち，$E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}$ 型のアフィンワイル群対称性を持つ加法的離散 Painlevé 方程式のもっとも簡単な超幾何解を構成する．これによって超幾何解を許容するとされる 2 階の全ての Painlevé 系に対して，解として現れる超幾何函数の同定が完了したことになる．

1　はじめに

2 階の Painlevé 系の理論は Sakai による代数幾何学的分類理論 [1] によって大きく進展した．それによると，2 階の Painlevé 系の一種の定義多様体である初期値空間は複素射影平面 $\mathbb{P}^2$ の 9 点を blow-up することによって得られる曲面と同定される．9 点の入れ替えと Cremona 変換と呼ばれる 2 次変換がアフィンワイル群をなし，離散 Painlevé 方程式はアフィンワイル群の平行移動部分群に対応する双有理写像として得られる．Painlevé 系は初期値空間を特徴づける 9 点の配置によって分類され，特に 9 点が射影平面上で一般の位置にある場合は，差分間隔が楕円函数で与えられ $E_8^{(1)}$ 対称性を持つ「楕円 Painlevé 方程式」が得られ，点配置の退化によって 22 通りの初期値空間とその上の離散 Painlevé 方程式が定式化される．そのうち 8 個の曲面が連続の flow を許容するが，それが Painlevé 微分方程式に他ならず，さらにその flow は上位の曲面上の離散時間発展の連続極限で得られる．

Sakai 理論によって Painlevé 系の研究は大きな武器を得た．それを用いて現在さまざまな研究が行われているが，例えば Painlevé 系の超幾何型の特殊函数で表される解 (超幾何解) として現れる超幾何函数を決定することは重要な問題である．特に，特殊函数の「親玉」として知られるガウスの超幾何函数 ${}_2F_1$ は $D_4^{(1)}$ 型の曲面上の Painlevé 系の解として現れるが，それより上位の (対称性の大きい) ものに現れる超幾何函数を明らかにすることは興味深い問題である．論文 [2] では楕円 Painlevé 方程式について，[3, 4] では q-差分型の離散 Painlevé 方程式で超幾何解を持ち得ると期待されている全ての場合について，もっとも簡単な超幾何解を構成することに成功した．最近，著者は $E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}$ 型アフィンワイル群対称性を持つ加法的離散 Painlevé 系のもっとも簡単な超幾何解を構成することに成功し，2 階 Painlevé 系で超幾何解が期待される全ての場合について現れる超幾何函数のリストが完成した．本報告ではこの 3 種類の場合の解の具体形を報告したい．式が煩雑になるので，本報告はで $E_7^{(1)}$ 型の場合について証明の概略を述べ，他の場合は結果のみを記すことにする．

2　離散 Painlevé 方程式の超幾何解

2.1　一般化超幾何級数

本節では解として現れる超幾何級数に関する事項をまとめておく．一般化超幾何級数 (generalized hypergeometric series) ${}_pF_q$ は

$$ {}_pF_q\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_p\\ \beta_1,\ldots,\beta_q\end{matrix};z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1,\cdots\alpha_p)_n}{(\beta_1,\cdots,\beta_q)_n}\,\frac{z^n}{n!}, \tag{1}$$

$$ (\alpha_1,\ldots,\alpha_p)_n=(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_p)_n,\quad (\alpha_k)_n=\prod_{i=1}^{n}(\alpha_k+1-i),\quad \beta_k\neq 0,-1,-2,\ldots\ (k=1,\ldots,q), \tag{2}$$

で定義される [5]．特に $p = r + 1, q = r$ で条件

$$\alpha_1 + \cdots \alpha_{r+1} + k = \beta_1 + \cdots + \beta_r, \tag{3}$$

を満たすときに *k-balanced*,

$$1 + \alpha_1 = \beta_1 + \alpha_2 = \cdots = \beta_r + \alpha_{r+1}, \quad \alpha_2 = 1 + \frac{\alpha_1}{2}, \tag{4}$$

を満たすときに *very-well-poised* とそれぞれ呼ばれる．本稿では特に $z = 1$ の場合が現れるが，この場合，収束性には注意を払う必要がある．命題の形でまとめておく．

命題 **2.1**

(i) ([6],p.241) 無限級数 $\sum_n a_n$ に対して $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$ が成り立つとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right), \quad \mu = \alpha + i\beta, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \lambda > 1, \tag{5}$$

であれば $\sum_n a_n$ は絶対収束する．

(ii) ([5]) 一般化された超幾何級数 ${}_{r+1}F_r\left(\begin{matrix} a_0, a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_r \end{matrix}; 1\right)$ は

$$\mathrm{Re}\,(a_0 + \cdots + a_r) < \mathrm{Re}\,(b_1 + \cdots + b_r), \tag{6}$$

のときに一様絶対収束する．

2.2 $E_7^{(1)}$ 型

$E_7^{(1)}$ 型の離散 Painlevé 方程式は次のように与えられる [7].

$$\begin{aligned} \frac{(y + \overline{x} - t - \overline{t})(x + y - 2t)}{(y + \overline{x})(x + y)} &= \frac{(y - t - a_1)(y - t - a_2)(y - t - a_3)(y - t - a_4)}{(y - a_5)(y - a_5)(y - a_6)(y - a_7)(y - a_8)}, \\ \frac{(x + y - 2t)(x + \underline{y} - t - \underline{t})}{(x + y)(x + \underline{y})} &= \frac{(x - t + a_1)(x - t + a_2)(x - t + a_3)(x - t + a_4)}{(x + a_5)(x + a_6)(x + a_7)(x + a_8)}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\overline{t} = t + 1, \quad \underline{t} = t - 1, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1, \quad a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 0. \tag{8}$$

$W = W(a, b, c, d, e, f)$ を very-well-poised ${}_7F_6$

$$W(a, b, c, d, e, f) = {}_7F_6\left(\begin{matrix} a, 1 + \frac{a}{2}, b, c, d, e, f \\ \frac{a}{2}, 1 + a - b, 1 + a - c, \ldots, 1 + a - f \end{matrix}; 1\right), \tag{9}$$

とする．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 2.2 $E_7^{(1)}$ 型離散 Painlevé 方程式 (7) において，

$$z = \frac{x - t + a_1}{x + a_5}, \tag{10}$$

とする．このとき，

$$z=\frac{a_1-a_3}{a_5+t-a_3}\,\frac{W(a,b+1,c,d,e,f)}{W(a,b,c,d,e,f)}, \tag{11}$$

は (7) の $a_1+a_3=a_5+a_7$ の場合の解を与える．ただし，パラメータ $a,\ldots,f$ は以下で与えられる．

$$a=a_1+a_8-a_3-a_5,\quad b=a_8-a_5,\quad c=a_1+t-a_5,\quad d=a_1-t-a_5,\quad e=a_2-a_3,\quad f=a_4-a_3. \tag{12}$$

注意

(i) Terminating の場合，例えば $f=-n\in\mathbb{Z}_{<0}$ のとき，解は Wilson 多項式もしくは Racah 多項式で表すことができる [8]．なお，terminating ${}_7F_6$ は terminating ${}_4F_3$ で書くことができる [5]．

(ii) 収束条件は $\mathrm{Re}\,(a_5-a_6)=\mathrm{Re}\,(a_1+a_3+a_5+a_8)>0$ である．

以下，定理の証明の概要を述べる．具体的な表式は煩雑になるので，紙数の都合もあり，大まかな手続きだけを述べることにする．まず (7) は以下のように Riccati 化される．

命題 2.3 $a_1+a_3=a_5+a_7$ のとき，(7) は Riccati 方程式

$$\overline{x}=\frac{(\overline{t}^2-(a_1+a_2)\overline{t}+a_2a_4-a_6a_8)y+(t+\overline{t})a_6a_8}{(\overline{t}+t)y-t^2-(a_2+a_4)t-a_2a_4+a_6a_8}, \tag{13}$$

$$y=\frac{(t^2+(a_1+a_3)t+a_1a_3-a_5a_7)x+2ta_5a_7}{2tx-t^2+(a_1+a_3)t-a_1a_3+a_5a_7}, \tag{14}$$

への特殊化を許容する．

この証明は次のようにすればよい．(7) を次のように分解する：

$$\frac{y+\overline{x}-t-\overline{t}}{y+\overline{x}}=\frac{(y-t-a_2)(y-t-a_4)}{(y-a_6)(y-a_8)}, \tag{15}$$

$$\frac{x+y-2t}{x+y}=\frac{(y-t-a_1)(y-t-a_3)}{(y-a_5)(y-a_7)}, \tag{16}$$

$$\frac{x+\underline{y}-t-\underline{t}}{x+\underline{y}}=\frac{(x-t+a_2)(x-t+a_4)}{(x+a_6)(x+a_8)}, \tag{17}$$

$$\frac{x+y-2t}{x+y}=\frac{(x-t+a_1)(x-t+a_3)}{(x+a_5)(x+a_7)}. \tag{18}$$

直接計算によって，$a_1+a_3=a_5+a_7$ のとき，(16), (18) から (14) が，同様に (16), (18) から (13) が consistent に得られることがわかる．□

次に，(10) で定義される z に関する Riccati 方程式を書き下し，それを

$$\overline{z}=\frac{Az+B}{Cz+D}, \tag{19}$$

とする ($A\sim D$ の具体形は複雑なので省略する)．(19) を線形化するため $z=F/G$ とおく．H を分離函数とすると，

$$\frac{\overline{F}}{H}=AF+BG,\quad \frac{\overline{G}}{H}=CF+DG, \tag{20}$$

を得る．(20) から G を消去すると，F に関する線形 2 階差分方程式

$$\overline{F}-c_2\,F+c_3\,\underline{F}=0,\quad c_2=\frac{H}{\underline{B}}(A\underline{B}+B\underline{D}),\quad c_3=\frac{B}{\underline{B}}H\underline{H}(\underline{AD}-\underline{BC}), \tag{21}$$

を得る．今，W の 3 項間関係式は

$$V_1\left[W(c^+,d^-)-W\right]+V_2W+V_3\left[W(c^-,d^+)-W\right]=0, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{c(a-c)(a-c+1)(d+b-a-1)(d+e-a-1)(d+f-a-1)}{c-d+1},\\
V_2 &= (c-d)(c+d-a-1)bef,\\
V_3 &= -\frac{d(a-d)(a-d+1)(c+b-a-1)(c+e-a-1)(c+f-a-1)}{d-c+1},
\end{aligned} \tag{23}$$

で与えられる [9]．ここで，$W(c^\pm)=W(a,b,c\pm1,d,e,f)$ という記法を用いている．(21) の H をうまく選ぶと，(22), (23) に帰着させることができ，

$$F\propto W(a,b+1,c,d,e,f), \tag{24}$$

と同定できる．ただし，$a,\ldots,f$ は (12) で与えられる．

次に，(20) から F を消去すると，G に関する線形 2 階差分方程式を得るが，同じ H を用いては W と同定できない．そこでゲージ因子 κ を導入して $G\to\kappa G$ と置き換え

$$\frac{\overline{\kappa}}{\kappa}=k,\quad \frac{H}{k}=\widetilde{H}, \tag{25}$$

とおく．すると，

$$z=\frac{1}{\kappa}\frac{F}{G},\quad \overline{G}-d_2\,G+d_3\,\underline{G}=0,\quad d_2=\frac{\widetilde{H}}{\underline{C}}(D\underline{C}+C\underline{A}),\quad d_3=\frac{C}{\underline{C}}\widetilde{H}\underline{\widetilde{H}}(\underline{AD}-\underline{BC}), \tag{26}$$

となる．ここで $\widetilde{H}$ をうまく選ぶと F と同様に

$$G\propto W(a,b,c,d,e,f), \tag{27}$$

と同定できる．そこで，

$$F=\theta(a,b+1,c,d,e,f)W(a,b+1,c,d,e,f),\quad G=\theta(a,b,c,d,e,f)W(a,b,c,d,e,f), \tag{28}$$

とおくと，ここまで終了した時点で z と線形関係式 (20) はそれぞれ

$$z=\frac{1}{\kappa}\times\frac{\theta(a,b+1,c,d,e,f)W(a,b+1,c,d,e,f)}{\theta(a,b,c,d,e,f)W(a,b,c,d,e,f)},\quad \frac{H}{\widetilde{H}}=k,\quad \frac{\overline{\kappa}}{\kappa}=k, \tag{29}$$

$$\frac{\theta(b^+,c^+,d^-)W(b^+,c^+,d^-)}{H}=A\theta(b^+,c,d)W(b^+,c,d)+\kappa B\theta(b,c,d)W(b,c,d), \tag{30}$$

$$\frac{\overline{\kappa}\theta(b,c^+,d^-)W(b,c^+,d^-)}{H}=C\theta(b^+,c,d)W(b^+,c,d)+\kappa D\theta(b,c,d)W(b,c,d), \tag{31}$$

となっている．最後に，(30), (31) を既知の W の隣接関係式と比較すると θ が決まる．以上の手続きを踏んで定理 2.2 が証明される．

2.3 $E_6^{(1)}$ 型

$E_6^{(1)}$ 型の離散 Painlevé 方程式は次のように与えられる [7].

$$
\begin{aligned}
(\overline{x}+y)(x+y) &= \frac{(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)}{(y-a_5-\overline{t})(y+a_5-t)},\\
(x+y)(x+\underline{y}) &= \frac{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)}{(x-a_6-t)(x+a_6-t)},
\end{aligned} \tag{32}
$$

$$
\overline{t} = t+1, \quad a_1+a_2+a_3+a_4 = 0. \tag{33}
$$

この場合の超幾何解は ${}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};1\right)$ を用いて次のように表される.

定理 2.4 $E_6^{(1)}$ 型 discrete Painlevé 方程式 (32) において,

$$
z = \frac{x+a_1}{x-t-a_6}, \tag{34}
$$

とする. このとき,

$$
z = \frac{-a_1+a_3}{a_1+a_2+a_3-a_5+t}\,\frac{{}_3F_2\left(\begin{matrix} a+1,b,c \\ d,e \end{matrix};1\right)}{{}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c+1 \\ d,e \end{matrix};1\right)}, \tag{35}
$$

$$
a = a_3+a_5-t, \quad b = a_3-a_2, \quad c = 2a_1+a_2+a_3, \quad d = -a_2+a_3+2a_5+1, \quad e = a_1+a_2+2a_3+1, \tag{36}
$$

は (32) の $a_1+a_2 = a_5+a_6$ の場合の解を与える.

注意

(i) ${}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};1\right)$ には

$$
{}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};1\right) = \frac{\Gamma(d+e-a-b-c-1)}{\Gamma(d-a)\Gamma(d+e-b-c)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} a,e-b,e-c \\ e,d+e-b-c \end{matrix};1\right), \tag{37}
$$

$$
{}_3F_2\left(\begin{matrix} a,b,c \\ d,e \end{matrix};1\right) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(e)\Gamma(d+e-a-b-c)}{\Gamma(c)\Gamma(d+e-b-c)\Gamma(d+e-a-c)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} d-c,e-c,d+e-a-b-c \\ d+e-b-c,d+e-a-c \end{matrix};1\right), \tag{38}
$$

など [10, 11, 12] といった変換があり, 隣接関係式を満たす函数の同定はこの変換に応じて多くのやり方がある.

(ii) 隣接関係式の同定のやり方に応じて収束条件が変わる. 例えば上の表示では Re $(1+a_5-a_1+t) > 0$ である. この条件は独立変数 t に依存するのでかなり気持ちが悪い. ただし, Thomae の変換 (38) を適用した後の表示では Re $(2a_1+a_2+a_3) > 0$ とできる. このようにして解の解析接続をしていくことができるが, どこまで収束域を広げられるかは明らかでない.

(iii) Terminating の場合, 例えば $c = -n \in \mathbb{Z}_{<0}$ のときは解は Hahn 多項式 [8] で表すことができる.

2.4 $E_8^{(1)}$ 型

$E_8^{(1)}$ 型加法的離散 Painlevé 方程式は次のように与えられる [13, 14].

$$
\begin{aligned}
\frac{(x-\overline{y}+(t+\overline{s})^2)(x-y+(t+s)^2)+4x(t+\overline{s})(t+s)}{(t+s)(x-\overline{y}+(t+\overline{s})^2)+(t+\overline{s})(x-y+(t+s)^2)} &= 2\frac{x^4+S_2x^3+S_4x^2+S_6x+S_8}{8tx^3+S_3x^2+S_5x+S_7},\\
\frac{(y-\underline{x}+(\underline{t}+s)^2)(y-x+(t+s)^2)+4y(t+s)(\underline{t}+s)}{(t+s)(y-\underline{x}+(\underline{t}+s)^2)+(\underline{t}+s)(y-x+(t+s)^2)} &= 2\frac{y^4+\Sigma_2y^3+\Sigma_4y^2+\Sigma_6y+\Sigma_8}{8sy^3+\Sigma_3y^2+\Sigma_5y+\Sigma_7},
\end{aligned}
\tag{39}
$$

ただし

$$
\begin{gathered}
\bar{t}=t+1,\quad \underline{t}=t-1,\quad s=t-\frac{1}{2},\quad a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=0,\\
S_i:\ t+a_i \text{ に関する } i \text{ 次の基本対称式},\quad \Sigma_i:\ s-a_i \text{ に関する } i \text{ 次の基本対称式}
\end{gathered}
\tag{40}
$$

である．超幾何解を記述するためにいくつか準備をしておく．まず，ϕ を very-well-poised 2-balanced ${}_9F_8$

$$
\phi(a;b,c,d,e,f,g,h)={}_9F_8\left(\begin{matrix} a,1+\frac{a}{2},b,c,d,e,f,g,h \\ \frac{a}{2},1+a-b,1+a-c,\dots,1+a-h\end{matrix};1\right),
\tag{41}
$$

とし，パラメータは平衡条件

$$
3a+2=b+c+d+e+f+g+h,
\tag{42}
$$

を満たすものとする．Φ を

$$
\Phi(a;b,c,d,e,f,g,h)=\Phi^{(b)}(a;b,c,d,e,f,g,h)=\phi(a;b,c,d,e,f,g,h)+\phi'^{(b)}(a;b,c,d,e,f,g,h),
\tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi'^{(b)}(a;b,c,d,e,f,g,h)=\Gamma&\left(\begin{matrix} 1+2b-a,\ a-b,\ 1+a-c,\ 1+a-d,\ 1+a-e,\ 1+a-f,\ 1+a-g,\ 1+a-h,\ b+c-a,\ b+d-a,\ b+e-a,\ b+f-a,\ b+g-a,\ b+h-a \\ 1+a,\ b-a,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ 1+b-c,\ 1+b-d,\ 1+b-e,\ 1+b-f,\ 1+b-g,\ 1+b-h\end{matrix}\right)\\
&\times\phi(2b-a;b,b+c-a,b+d-a,b+e-a,b+f-a,b+g-a,b+h-a),
\end{aligned}
\tag{44}
$$

で定義する．ただし，

$$
\Gamma\left(\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p\\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_q\end{matrix}\right)=\frac{\prod_{i=1}^{p}\Gamma(\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(\beta_q)},
\tag{45}
$$

という記号を用いている [9]．このとき，以下の定理が成り立つ．

定理 2.5 $E_8^{(1)}$ 型加法的離散 Painlevé 方程式 (39) において，

$$
z=\frac{y-y_1}{y-y_8},
\tag{46}
$$

とする．このとき，

$$
z=\lambda\,\frac{\Phi(a+2;b,c+1,d+1,e+1,f+1,g+1,h+1)}{\Phi(a;b,c,d,e,f,g,h)},
\tag{47}
$$

$$
\lambda=-\frac{(a_1-a_4-a_6+a_8)(a_1-a_4-a_6+a_8-2)\prod_{i=2,4,6}(a_1-a_i)(a_3+a_7+2t)(a_5+a_7+2t)(a_3+a_5+2t)}{(a_1+a_8-2s)(a_1+a_8-2s-2)\prod_{i=3,5,7}(a_1+a_i-a_4-a_6)(a_8-a_4)(a_8-a_6)(a_1+a_9+2s-1)},
\tag{48}
$$

は (39) の $a_1+a_3+a_5+a_7=-1$ の場合の解を与える．ただし，パラメータ $a,\dots,h$ は

$$
\begin{aligned}
a&=-\frac{a_1+a_2+2a_8+1}{2}, & b&=\frac{2-a_2-a_8-2t}{2}, & c&=\frac{2s-a_2-a_8}{2}, & d&=\frac{a_3-a_8}{2},\\
e&=\frac{a_4-a_1}{2}, & f&=\frac{a_5-a_8}{2}, & g&=\frac{a_6-a_1}{2}, & h&=\frac{a_7-a_8}{2},
\end{aligned}
\tag{49}
$$

で与えられる．

注意

(i) Φ の定義 (43) において，パラメータ b が特別扱いされているが (distinguished parameter と呼ぶ), $b, \cdots, h$ のどれを特別扱いしても (47) は解となる．(47) でも b が特別であるが，これは解の distinguished parameter とは関係がない．

(ii) 収束性には注意を払う必要があるが，この場合，平衡条件 (42) を満足すれば収束条件 (6) は自動的に満たされることがわかる．

(iii) Terminating の場合，すなわち $a, \ldots, h$ のどれかが負の整数の場合，Φ の第 1 項は有限項で切れ，第 2 項は 0 となる．しかし non-terminating の場合，超幾何級数単項では 3 項間関係式を満たさず，(39) の解となることはできない．詳細は準備中の論文に譲りたい．

3 まとめ

以上の結果をまとめると，[2, 3, 4] などで得られた結果と合わせて，Sakai 理論の初期値空間と対応する超幾何函数の退化図式が得られたことになる．

$$
\begin{tikzcd}
E_8^{(1)} \arrow[d] & & & & & & & A_1^{(1)\prime} \arrow[dr] & \\
E_8^{(1)*} \arrow[r] \arrow[d] & E_7^{(1)*} \arrow[r] \arrow[d] & E_6^{(1)*} \arrow[r] \arrow[d] & \begin{array}{c} D_5^{(1)} \\ (q\mathrm{P_{VI}}) \end{array} \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{array}{c} A_4^{(1)} \\ (q\mathrm{P_{V}}) \end{array} \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{array}{c} (A_2 + A_1)^{(1)} \\ (q\mathrm{P_{IV}},\ q\mathrm{P_{III}}) \end{array} \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{array}{c} (A_1 + A'_1)^{(1)} \\ (q\mathrm{P_{II}}) \end{array} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & A_1^{(1)} \arrow[dr] & A_0^{(1)} \\
E_8^{(1)**} & E_7^{(1)**} & E_6^{(1)**} & & \begin{array}{c} D_4^{(1)} \\ (\mathrm{P_{VI}}) \end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c} A_3^{(1)} \\ (\mathrm{P_{V}}) \end{array} \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{array}{c} (2A_1)^{(1)} \\ (\mathrm{P_{III}}) \end{array} \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{array}{c} A_1^{(1)\prime} \\ (\mathrm{P_{III}^{D_7^{(1)}}}) \end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c} A_0^{(1)} \\ (\mathrm{P_{III}^{D_8^{(1)}}}) \end{array} \arrow[d] \\
& & & & & & \begin{array}{c} A_2^{(1)} \\ (\mathrm{P_{IV}}) \end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c} A_1^{(1)} \\ (\mathrm{P_{II}}) \end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c} A_0^{(1)} \\ (\mathrm{P_{I}}) \end{array}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} \text{balanced} \\ {}_{10}E_9 \end{array} \arrow[d] & & & & & & & \times \arrow[dr] & \\
\begin{array}{c} \text{balanced} \\ {}_{10}W_9 \end{array} \arrow[r] \arrow[d] & {}_8W_7 \arrow[r] \arrow[d] & {}_3\varphi_2 \arrow[r] \arrow[d] & {}_2\varphi_1 \arrow[r] \arrow[dr] & {}_1\varphi_1 \arrow[r] \arrow[dr] & \begin{array}{c} {}_1\varphi_1\left({a \atop 0};q,z\right) \\ {}_1\varphi_1\left({0 \atop b};q,z\right) \end{array} \arrow[r] \arrow[dr] & {}_1\varphi_1\left({0 \atop -q};q,z\right) \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & \times \arrow[dr] & \times \\
\begin{array}{c} \text{v.w.p} \\ \text{2−balanced} \\ {}_9F_8{}^* \end{array} & \begin{array}{c} \text{v.w.p} \\ {}_7F_6{}^* \end{array} & {}_3F_2{}^* & & \begin{array}{c} {}_2F_1 \\ \text{Gauss} \end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c} {}_1F_1 \\ \text{Kummer} \end{array} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{Bessel} \arrow[r] \arrow[dr] & \times \arrow[r] & \times \arrow[d] \\
& & & & & & \begin{array}{c} \text{parabolic} \\ \text{cylinder} \end{array} \arrow[r] & \text{Airy} \arrow[r] & \times
\end{tikzcd}
$$

ただし，初期値空間の型は作用するワイル群の型で表し，矢印は極限操作による退化を表す (Sakai による図 [1] の全ての矢印を記載していない)．また，両図左の E 型の部分で，上の図の $*$ はワイル群作用が乗法的であることを，$**$ は加法的であることを示し，下の図の $*$ は超幾何級数の引数 z が $z = 1$ であることを示す．

最後に，本研究にあたって神戸大学の増田哲，野海正俊，太田泰広，山田泰彦の諸氏にはいろいろな局面で有益な議論やコメントをしていただいた．この場を借りて感謝したい．

参考文献

[1] H. Sakai,*Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Commun. Math. Phys. **220** (2001) 165–229.

[2] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada, ${}_{10}E_9$ *solution to the elliptic Painlevé equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**(2003) L263-272.

[3] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada, *Hypergeometric solutions to the q-Painlevé equations*, Int. Math. Res. Not. **2004**(2004) 2497-2521.

[4] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta and Y. Yamada, *Construction of hypergeometric solutions to the q-Painlevé equations*, Int. Math. Res. Not. **2005**(2005) 1439-1463.

[5] W.N. Bailey, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics No. 32 (Cambridge, Cambridge University Press, 1935).

[6] T. Bromwich, *An introduction to the theory of infinite series*, (London, MacMillan, 1949).

[7] A. Ramani, B. Grammaticos, T. Tamizhmani and K.M. Tamizhmani, “*Special function solutions of the discrete Painlevé equations*, Comp. Math. Appl. **42**(2001) 603–614.

[8] R. Koekoek and R.F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Delft University of Technology, Faculty of Information Technology and Systems, Department of Technical Mathematics and Informatics, Report no. **98-17**, 1998.

[9] D.R. Masson, *Associated Wilson polynomials*, Constr. Approx. **7**(1991) 521-534.

[10] D.P. Gupta, M.E.H. Ismail and D.R. Masson, *Associated Continuous Hahn Polynomials*, Can. J. Math. **43**(1991) 1263-1280.

[11] W. N. Bailey, *Contiguous hypergeometric functions of the type* ${}_3F_2(1)$, Proc. Glasgow Math. Assoc. **2**(1954) 62-65.

[12] J. A. Wilson, *Three term contiguous relations and some new orthogonal polynomials*, in: Pade and Rational Approximation, eds. E.B. Saff and R.S. Varga (Academic Press, New York, 1977) 227-232.

[13] Y. Ohta, A. Ramani and B. Grammaticos, *An affine Weyl group approach to the eight-parameter discrete Painlevé equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **34**(2001) 10523–10532.

[14] Mikio Murata, Hidetaka Sakai and Jin Yoneda, *Riccati solutions of discrete Painlevé equation with Weyl group symmetry of type* $E_8^{(1)}$, J. Math. Phys. **44**(2003), 1396-1414.