Charney-Hasegawa-Mima 方程式の asymptotic model の Hamilton 形式

神戸大学大学院自然科学研究科　末吉雅和 (Masakazu Sueyoshi)
神戸大学大学院自然科学研究科　岩山隆寛 (Takahiro Iwayama)

概 要

Charney-Hasegawa-Mima (CHM) 方程式の asymptotic model (CHM-AM) は, CHM 方程式 (浅水系の準地衡流渦位方程式) で現象の水平スケールが Rossby の変形半径より大きい場合に相当する．CHM-AM は海洋や木星大気の単純なモデルである．本研究では, CHM-AM を非正準形式の Hamilton 形式で表した．さらに系の Impulse と Casimir を用いて, CHM-AM の定常解が Liapunov の意味で非線形安定である条件を得た．また CHM-AM の定常解である 2 次元ジェットについて, 初期値で決まる擾乱の上限値が存在することを示した.

1　はじめに

大規模な大気, 海洋の運動は近似的に地衡流の状態にある． 自由表面のある浅い流体層において, ほぼ地衡流の状態を保ちながら時間発展する運動を記述する方程式として, Charney-Hasegawa-Mima (CHM) 方程式 (Pedlosky 1987)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi - \lambda^2\psi) + \partial(\psi, \nabla^2\psi) = 0, \tag{1}$$

$$\partial(A, B) \equiv \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x} \tag{2}$$

がある．ここで, $\psi(x, y, t)$ は流れ関数であり, $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, $\lambda = L/R_d$, L は現象の水平スケール, R_d は Rossby の変形半径である．(1) で $\lambda \to 0$ をとると, 2 次元 Euler 方程式

$$\frac{\partial \nabla^2\psi}{\partial t} + \partial(\psi, \nabla^2\psi) = 0 \tag{3}$$

を得る．反対に $\lambda \to \infty$ として t/λ^2 をあらためて t とすると, (1) は

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \partial(\nabla^2\psi, \psi) = 0 \tag{4}$$

となる (Larichev & McWilliams 1991). (4) は CHM 方程式の asymptotic model (CHM-AM) と呼ばれる．(4) はほぼ地衡流の状態で水平スケールが変形半径より大きい流れの時間発展を記述するもので, 海洋や木星大気の単純なモデルである.

本研究では, CHM-AM を非正準形式の Hamilton 形式 (review として Morrison 1998; Shepherd 1990) で表した．系の Hamilton 構造は系の定常解の安定性の研究の際に役立つことが知られている (Holm *et al.* 1985). 本研究では, CHM-AM の Hamilton 形式を利用して CHM-AM の定常解が非線形安定である条件を得た．CHM 方程式の Hamilton 形式を利用した流れの安定性の結果は Swaters (2000) にある．しかし, CHM-AM の定常解の安定性に関する研究は行われていない.

2　非正準形式の Hamilton 系

ここでは非正準形式の Hamilton 系の一般論 (e.g. Scinocca & Shepherd 1992) を簡単に紹介する．Euler 記述の流体の方程式は従属変数の数が偶数とは限らない (例えば, 3 次元流体方程式の方程式は従属変数が速度場 3 つと密度とエントロピーの計 5 つ) ため, 一般には正準形式の Hamilton 形式で表すことはできない.

ここで n 個の従属変数 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)=(q_1(\boldsymbol{x},t),\cdots,q_n(\boldsymbol{x},t))$ を持つ流体方程式系を考える．この流体方程式系を非正準形式の Hamilton 形式で表すには,

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}=\boldsymbol{J}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{q}} \tag{5}$$

と表現できる必要がある．ここで t は時間, $\boldsymbol{J}$ は n 行 n 列の行列, $\mathcal{H}[\boldsymbol{q}]$ は Hamiltonian と呼ばれる保存する汎関数である．$\delta\mathcal{H}/\delta\boldsymbol{q}$ は $\mathcal{H}[\boldsymbol{q}]$ の汎関数導関数であり,

$$\delta\mathcal{H}[\boldsymbol{q};\delta\boldsymbol{q}]\equiv\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathcal{H}[\boldsymbol{q}+\varepsilon\delta\boldsymbol{q}]\equiv\int\left(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\boldsymbol{q}}\right)^{\top}\delta\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{6}$$

と定義される．$\delta\mathcal{H}[\boldsymbol{q};\delta\boldsymbol{q}]$ は第一変分と呼ばれる．さらに任意の汎関数 $\mathcal{F}[\boldsymbol{q}]$, $\mathcal{G}[\boldsymbol{q}]$, $\mathcal{Q}[\boldsymbol{q}]$ に対して,

$$[\mathcal{F},\mathcal{G}]\equiv\int\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\boldsymbol{q}}\right)^{\top}\boldsymbol{J}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\boldsymbol{q}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{7}$$

で定義される Poisson 括弧が

$$[\mathcal{F},\mathcal{G}]=-[\mathcal{G},\mathcal{F}], \tag{8}$$

$$[a\mathcal{F}+b\mathcal{G},\mathcal{Q}]=a[\mathcal{F},\mathcal{Q}]+b[\mathcal{G},\mathcal{Q}],\quad a,b\in\mathbf{R}, \tag{9}$$

$$[\mathcal{F}\mathcal{G},\mathcal{Q}]=\mathcal{F}[\mathcal{G},\mathcal{Q}]+[\mathcal{F},\mathcal{Q}]\mathcal{G}, \tag{10}$$

$$[[\mathcal{F},\mathcal{G}],\mathcal{Q}]+[[\mathcal{G},\mathcal{Q}],\mathcal{F}]+[[\mathcal{Q},\mathcal{F}],\mathcal{G}]=0, \tag{11}$$

を満たす必要がある. (8), (9), (10), (11) はそれぞれ交代性, 分配則, 結合則, Jacobi の恒等式と呼ばれる.

系 (5) には

$$[\mathcal{F},\mathcal{C}]=0,\quad\forall\mathcal{F}[\boldsymbol{q}] \tag{12}$$

で定義される保存量 $\mathcal{C}[\boldsymbol{q}]$ が存在する. $\mathcal{C}[\boldsymbol{q}]$ を Casimir と呼ぶ. (7) と (12) より, Casimir $\mathcal{C}[\boldsymbol{q}]$ は

$$\boldsymbol{J}\frac{\delta\mathcal{C}}{\delta\boldsymbol{q}}=0 \tag{13}$$

を満たすことがわかる.

3 CHM-AMのHamilton構造

考える領域 D は無限の平面, または 2 重周期境界とする. このとき CHM-AM (4) は次の Hamilton 構造を持つ:

$$q = \psi, \tag{14}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} q = J \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q}, \tag{15}$$
$$\mathcal{H}[\psi] = \frac{1}{2} \iint_D \nabla \psi \cdot \nabla \psi \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \tag{16}$$
$$J(*) = -\partial(\psi, *). \tag{17}$$

以下でこのことを確かめる. $\mathcal{H}[\psi]$ の第一変分は,

$$\delta \mathcal{H}[\psi; \delta\psi] = \iint_D \nabla \psi \cdot \nabla \delta\psi \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_D \delta\psi (-\nabla^2 \psi) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{18}$$

である. したがって

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi} = -\nabla^2 \psi \tag{19}$$

を得る. (14), (17), (19) を (15) に代入すると, CHM-AM (4) を得る. CHM-AM の Poisson 括弧は, (7) と (17) より

$$[\mathcal{F}, \mathcal{G}] \equiv \iint_D \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi} J \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \psi} \mathrm{d}x \mathrm{d}y = -\iint_D \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi} \partial \left(\psi, \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \psi} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{20}$$

である. ここで, $\mathcal{F}[\psi]$, $\mathcal{G}[\psi]$ は任意の汎関数である. (20) は, 式 (8), (9), (10), (11) を満たす. Jacobi の恒等式の証明は, 他の 3 つの性質の証明より難しい (Jacobi の恒等式の証明は付録 A で行う). こうして, CHM-AM (4) が Hamilton 構造 (14), (15), (16), (17) を持つことが確かめられた.

CHM-AM の Casimir $\mathcal{C}[\psi]$ は

$$J \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \psi} = -\partial \left(\psi, \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \psi} \right) = 0 \tag{21}$$

を満たす. (21) より

$$\frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \psi} = C(\psi) \Leftrightarrow \mathcal{C}[\psi] = \iint_D \left\{ \int^{\psi} C(\xi) d\xi \right\} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{22}$$

である. ここで C は任意の関数である.

また CHM-AM は他にも保存量

$$\mathcal{M}_x[\psi] = \iint_D y \psi \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \tag{23}$$
$$\mathcal{M}_y[\psi] = \iint_D x \psi \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y, \tag{24}$$
$$\mathcal{M}_\theta[\psi] = -\frac{1}{2} \iint_D r^2 \psi \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{25}$$

を持つ．これらを Impulse と呼ぶ．

次に CHM-AM (4) の Hamilton 構造と CHM 方程式 (1) の Hamilton 構造 (Weinstein 1983) の関係について議論する．CHM 方程式の Hamilton 構造は式 (15) 及び

$$
\begin{aligned}
q &= \nabla^2\psi - \lambda^2\psi, && (26)\\
\mathcal{H}[q] &= \frac{1}{2}\iint_D \nabla\psi\cdot\nabla\psi + \lambda^2\psi^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, && (27)\\
J(*) &= -\partial(q,*) && (28)
\end{aligned}
$$

である．$\lambda\to 0$ のとき, CHM 方程式の Hamilton 構造 (15), (26), (27), (28) は 2 次元 Euler 方程式の Hamilton 構造となる．一方, $q\approx -\lambda^2\psi$ の場合, (26), (27), (28) は

$$
\begin{aligned}
q &\approx -\lambda^2\psi, && (29)\\
\mathcal{H}[-\lambda^2\psi] &= \frac{1}{2}\iint_D \lambda^2\psi^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, && (30)\\
J(*) &= -\partial(-\lambda^2\psi,*) && (31)
\end{aligned}
$$

となる．ところが, (15), (29), (30), (31) からは CHM-AM は得られない．すなわち, CHM-AM の Hamilton 構造は CHM 方程式の Hamilton 構造からは直接得ることはできない．

4 定常解の非線形安定性

前節で得た Casimir は, 系の定常解が Liapunov の意味で安定である条件を得る際に重要な役割をはたす (Arnol'd 1966; Holm *et al.* 1985)．ここでは CHM-AM の定常解が Liapunov の意味で非線形安定である条件を調べる．CHM-AM の x 方向に一様な定常解を $\Psi(y)$ として, 与える擾乱を $\phi(x,y,t)$ とする．擾乱 $\phi(x,y,t)$ は境界条件

$$\phi(x,y,t)\to 0 \quad \text{as} \quad r=(x^2+y^2)^{1/2}\to\infty \tag{32}$$

を満たす．

Casimir (22) と x 方向の Impulse (23) を用いて

$$\mathcal{L}_x[\psi] = \mathcal{C}-\mathcal{M}_x = \iint_D \left\{\int^\psi C(\xi)\,\mathrm{d}\xi - y\psi\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{33}$$

を導入する．Casimir (22) と Impulse (23) は保存量なので $\mathcal{L}_x$ も保存量である．$\mathcal{L}_x$ の第一変分は

$$\delta\mathcal{L}_x[\psi] = \iint_D \{C(\psi)-y\}\delta\psi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{34}$$

である．定常解 $\Psi(y)$ の逆関数

$$Y(\Psi) = y \tag{35}$$

を導入して, $C=Y$ とすると

$$\delta\mathcal{L}_x[\Psi] = \iint_D \{Y(\Psi)-y\}\delta\psi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{36}$$

が成り立つ. この節の以下の内容は, 逆関数 Y が定義できる場合にしか有効ではない. さらに,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_x[\phi] &= \mathcal{L}_x[\Psi+\phi]-\mathcal{L}_x[\Psi]-\iint_D\{Y(\Psi)-y\}\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_D\left\{\int_\Psi^{\Psi+\phi}Y(\xi)\,\mathrm{d}\xi-Y(\Psi)\phi\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}\tag{37}$$

という量を導入する. (37) の 2 番目の等式の第 3 項については,

$$\iint_D\{Y(\Psi)-y\}\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{38}$$

である ((36) を参照). $\mathcal{N}_x[\phi]$ も保存量である.

もし実数 α, β に対して

$$0<\alpha\le\frac{dY(\Psi)}{d\Psi}\le\beta<\infty \tag{39}$$

が成り立つならば,

$$0<\frac{1}{2}\alpha\phi^2\le\int_\Psi^{\Psi+\phi}Y(\xi)\,\mathrm{d}\xi-Y(\Psi)\phi\le\frac{1}{2}\beta\phi^2<\infty \tag{40}$$

が成り立つ (証明は付録 B). 擾乱のノルムを

$$||\phi||^2=\iint_D\phi^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{41}$$

と定義すると, (40) より

$$0<\alpha||\phi||^2\le2\iint_D\left\{\int_\Psi^{\Psi+\phi}Y(\xi)\,\mathrm{d}\xi-Y(\Psi)\phi\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\mathcal{N}_x[\phi]\le\beta||\phi||^2<\infty \tag{42}$$

を得る. (42), 及び $\mathcal{N}_x[\phi]$ が保存量であることを用いると,

$$0<\alpha||\phi||^2\le2\mathcal{N}_x[\phi]=2\{\mathcal{N}_x[\phi]\}_{t=0}\le\beta||\phi||^2_{t=0}<\infty \tag{43}$$

を得る. (43) より

$$||\phi||\le\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}||\phi||_{t=0} \tag{44}$$

が成り立つので, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\delta=\varepsilon(\alpha/\beta)^{1/2}$ とすると,

$$||\phi||_{t=0}\le\delta=\varepsilon\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2}\Rightarrow||\phi||\le\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}||\phi||_{t=0}\le\varepsilon. \tag{45}$$

以上により条件 (39) が成り立つならば, CHM-AM の定常解 $\Psi(y)$ は Liapunov の意味で非線形安定である.

また同様の計算を行うと, 実数 α, β に対して

$$-\infty<\alpha\le\frac{dY(\Psi)}{d\Psi}\le\beta<0 \tag{46}$$

が成り立つならば, CHM-AM の定常解 $\Psi(y)$ は Liapunov の意味で非線形安定であることを証明できる.

まとめると, (39) または (46) が成り立つとき, 定常解 $\Psi(y)$ は Liapunov の意味で非線形安定である．これは次のように言いかえることができる．定常流の x 方向の速度を $U(y)$ とすると,

$$U(y) = -\frac{d\Psi(y)}{dy} \tag{47}$$

であるから, $U(y)$ が正定値または負定値ならば流れは安定である.

5 節で例を挙げるが, 無限の平面において $\min(dY/d\Psi) > 0$ であるが $r \to \infty$ で $dY/d\Psi \to \infty$ となり, (39) が成り立たない場合がある．この場合, 定常解は Lipunov の意味で非線形安定ではない．しかし, 2 次元 Euler 方程式での Carnevale & Shepherd (1990) の議論にならうと, 以下のようなことが言える．実数 α に対して

$$0 < \alpha < \frac{dY}{d\Psi}, \quad \alpha < \infty \tag{48}$$

が成り立つならば,

$$||\phi|| \leq \left(\frac{2}{\alpha}\mathcal{N}_x[\phi]\right)^{1/2} = \left\{\frac{2}{\alpha}(\mathcal{N}_x[\phi])_{t=0}\right\}^{1/2} \tag{49}$$

が得られる ((42) を参照)．これは (48) が成り立つならば, 擾乱のノルムには初期値で決まる上限値が存在するということである．同様に, 実数 β に対して

$$\frac{dY}{d\Psi} \leq \beta < 0, \quad \beta > -\infty \tag{50}$$

が成り立つならば,

$$||\phi|| \leq \left(\frac{2}{\beta}\mathcal{N}_x[\phi]\right)^{1/2} = \left\{\frac{2}{\beta}(\mathcal{N}_x[\phi])_{t=0}\right\}^{1/2} \tag{51}$$

が得られる.

5　具体的な流れの例

領域は無限に広がった平面とする．1 つの具体例として 2 次元ジェット

$$U(y) = -\frac{d\Psi(y)}{dy} = -\mathrm{sech}^2 y = -\frac{1}{\cosh^2 y} \quad (-\infty < y < \infty) \tag{52}$$

を考える (図 1). (52) より $\Psi(y) = -\tanh y$ (図 1) であるから, $\Psi(y)$ の逆関数 $Y(\Psi) = y$ が定義できる．$dY/d\Psi = \cosh^2 y$ の最小値は $\alpha = 1$ である．ところが, $y \to \pm\infty$ で $dY/d\Psi = \cosh^2 y \to \infty$ となり, Liapunov の意味で安定ではない ((39) が成り立たないため)．しかし, (49) より

$$||\phi|| \leq (2\mathcal{N}_x[\phi])^{1/2} = \{2(\mathcal{N}_x[\phi])_{t=0}\}^{1/2} \tag{53}$$

が成り立つ．つまり, CHM-AM の定常解 (52) には 初期値で決まる擾乱の上限値が存在する.

(52) は 2 次元 Euler 方程式 (3) の定常解でもある．その場合, Rayleigh の変曲点定理 (e.g. Drazin & Reid 2004) により, (52) は不安定の必要条件を満たす (実際に不安定である e.g.

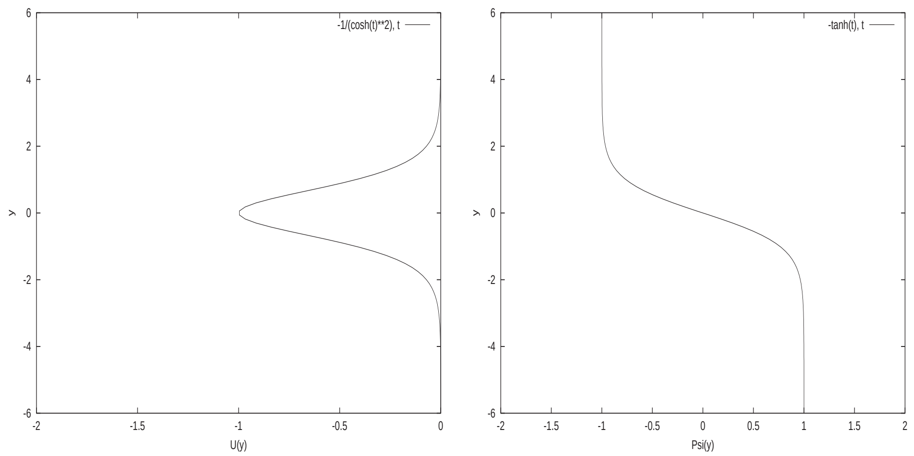

図 1: 2 次元ジェットの速度分布 (左上) とその流れ関数 (右上)

Drazin & Reid 2004). 2 次元 Euler 方程式 (3) は (1) で変形半径が大きい場合に相当する. 一方, CHM-AM は (1) で変形半径が小さい場合に相当し, (53) で示したように 定常流 (52) には初期値で決まる擾乱の上限値が存在する. このように, 変形半径の値により流れの性質が変わる例が存在する.

6 まとめ

本研究では, CHM 方程式の asymptotic model を Hamilton 形式で表した. そして, Impulse と Casimir を用いて CHM-AM の定常解が非線形安定である条件を得た. また, CHM-AM の定常解である 2 次元ジェット (52) に, 初期値で決まる擾乱の上限値が存在することを示した.

A Jacobi の恒等式の証明

CHM-AM の Jacobi の恒等式の証明を行う. 非弾性方程式の Jacobi の恒等式の証明は Scinocca & Shepherd (1992) にある.

$$
\begin{aligned}
&[[\mathcal{F},\mathcal{G}],\mathcal{Q}]+[[\mathcal{G},\mathcal{Q}],\mathcal{F}]+[[\mathcal{Q},\mathcal{F}],\mathcal{G}] \\
&=\iint_D\left\{\frac{\delta[\mathcal{F},\mathcal{G}]}{\delta\psi}J\frac{\delta\mathcal{Q}}{\delta\psi}+\frac{\delta[\mathcal{G},\mathcal{Q}]}{\delta\psi}J\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi}+\frac{\delta[\mathcal{Q},\mathcal{F}]}{\delta\psi}J\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&=\iint_D\left\{\frac{\delta[\mathcal{F},\mathcal{G}]}{\delta\psi}\partial(\psi,\,\frac{\delta\mathcal{Q}}{\delta\psi})+\frac{\delta[\mathcal{G},\mathcal{Q}]}{\delta\psi}\partial(\psi,\,\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi})+\frac{\delta[\mathcal{Q},\mathcal{F}]}{\delta\psi}\partial(\psi,\,\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi})\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{54}
$$

である. (54) を計算するために, $\dfrac{\delta[\mathcal{F},\mathcal{G}]}{\delta\psi}$ を計算する. $[\mathcal{F},\mathcal{G}]$ の第一変分は

$$
\begin{aligned}
\delta[\mathcal{F},\mathcal{G}]&=\delta\iint_D\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi}J\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\delta\iint_D\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi}\partial(\psi,\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&=-\iint_D\left\{\frac{\delta^2\mathcal{F}}{\delta\psi^2}\delta\psi\partial(\psi,\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi})+\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi}\partial(\delta\psi,\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi})+\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi}\partial(\psi,\frac{\delta^2\mathcal{G}}{\delta\psi^2}\delta\psi)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$= -\iint_D \left\{ \frac{\delta^2 \mathcal{F}}{\delta\psi^2}\partial(\psi, \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi}) - \partial(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi}, \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi}) - \frac{\delta^2\mathcal{G}}{\delta\psi^2}\partial(\psi, \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi}) \right\} \delta\psi \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{55}$$

である. これより,

$$\frac{\delta}{\delta\psi}[\mathcal{F}, \mathcal{G}] = -\frac{\delta^2\mathcal{F}}{\delta\psi^2}\partial(\psi, \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi}) + \partial(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi}, \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi}) + \frac{\delta^2\mathcal{G}}{\delta\psi^2}\partial(\psi, \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi}) \tag{56}$$

を得る. 同様に計算すると,

$$\frac{\delta}{\delta\psi}[\mathcal{G}, \mathcal{Q}] = -\frac{\delta^2\mathcal{G}}{\delta\psi^2}\partial(\psi, \frac{\delta\mathcal{Q}}{\delta\psi}) + \partial(\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi}, \frac{\delta\mathcal{Q}}{\delta\psi}) + \frac{\delta^2\mathcal{Q}}{\delta\psi^2}\partial(\psi, \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi}), \tag{57}$$

$$\frac{\delta}{\delta\psi}[\mathcal{Q}, \mathcal{F}] = -\frac{\delta^2\mathcal{Q}}{\delta\psi^2}\partial(\psi, \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi}) + \partial(\frac{\delta\mathcal{Q}}{\delta\psi}, \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi}) + \frac{\delta^2\mathcal{F}}{\delta\psi^2}\partial(\psi, \frac{\delta\mathcal{Q}}{\delta\psi}) \tag{58}$$

を得る. (56), (57), (58) を (54) に代入すると,

$$\begin{aligned}
&[[\mathcal{F}, \mathcal{G}], \mathcal{Q}] + [[\mathcal{G}, \mathcal{Q}], \mathcal{F}] + [[\mathcal{Q}, \mathcal{F}], \mathcal{G}] \\
&= \iint_D \left\{ \partial(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi}, \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi})\partial(\psi, \frac{\delta\mathcal{Q}}{\delta\psi}) + \partial(\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi}, \frac{\delta\mathcal{Q}}{\delta\psi})\partial(\psi, \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi}) + \partial(\frac{\delta\mathcal{Q}}{\delta\psi}, \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi})\partial(\psi, \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\psi}) \right\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

を得る. Jacobian (2) については, 任意の関数 $A(x, y, t)$, $B(x, y, t)$, $F(x, y, t)$, $G(x, y, t)$ に対して

$$\partial\,(A,\,B)\,\partial\,(F,\,G) + \partial\,(B,\,G)\,\partial\,(F,\,A) + \partial\,(G,\,A)\,\partial\,(F,\,B) = 0$$

が成り立つ. したがって, (17) と (20) で定義される Poisson bracket は Jacobi の恒等式を満たす.

B　式 (40) の証明

関数 $F(w)$ について, 実数 α, β により

$$\alpha \leq \frac{d^2F(w)}{dw^2} \leq \beta \tag{59}$$

が成り立つと仮定する. w について y から x まで積分すると,

$$\alpha(y - x) \leq \frac{dF(y)}{dy} - \frac{dF(x)}{dx} \leq \beta(y - x) \tag{60}$$

を得る. y について x から $x + h$ まで積分すると,

$$\frac{1}{2}\alpha h^2 \leq F(x + h) - F(x) - \frac{dF(x)}{dx}h \leq \frac{1}{2}\beta h^2 \tag{61}$$

を得る.

上の議論において

$$F(w) = \int^w Y(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma, \quad x = \Psi, \quad h = \phi \tag{62}$$

を代入すると, (39) が成り立つならば (40) が成り立つことがわかる.

参考文献

Arnol'd, V. I. 1966. On an a apriori estimate in the theory of hydrodynamical stability. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Matematika.* **54**, no.5, 3–5 (English transl. *Am. Math. Soc. Transl., Series2*, **79**, 267–269 (1969)).

Carnevale G. F. and Shepherd T. G. 1990. On the interpritation of Andrew's Theorem. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **51**, 1–17.

Drazin, P. G. and Reid, W. H. 2004. *Hydrodynamic Stability*, 2nd ed. Cambridge University Press.

Holm, D. D, Marsden, J. E., Ratiu, T., and Weinstein, A. 1985. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. *Phys. Rep.* **123**, 1–116.

Larichev, V. D. and McWilliams, J. C. 1991. Weakly decaying turbulence in an equivalent-barotropic fluid. *Phys. Fluids* **A 3**, 938–950.

Morrison, P. J. 1998. Hamiltonian description of the ideal fluid. *Rev. Mod. Phys.* **70**, 467–521.

Pedlosky, J. 1987. *Geophysical Fluid Dynamics.* 2nd ed. Springer-Verlag.

Scinocca, J. F. and Shepherd, T. G. 1992. Nonlinear wave-activity conservation laws and Hamiltonian structure for the two-dimensional anelastic equations. *J. Atmos. Sci.* **49**, 5–27.

Shepherd, T. G. 1990. Symmetries, conservation laws, and Hamiltonian structure in geophysical fluid dynamics. *Adv. Geophys.* **32**, 287–338.

Swaters, G. E. 2000. *Introduction to Hamiltonian Fluid Dynamics and Stability Theory.* CHAPMAN & HALL/CRC.

Weinstein, A. 1983. Hamiltonian structure for drift waves and geostrophic flow. *Phys. Fluids* **26**, 388–390.