

無限自由度を持つ現実流体中の低次カオス

Low order Chaos in Real Fluid with Infinite Degree of Freedom

三村 和男, 東海大学教養学部, 神奈川県平塚市北金目 1117, mimura@keyaki.cc.u-tokai.ac.jp
Kazuo Mimura, Dept. of Resources and Environment Science, School of Humanity and Culture, Tokai University
1117 KITAKANAME, HIRATSUKA, KANAGAWA 259-1292, JAPAN

Thermal convection in a closed loop was simulated by using a grid model. The Lorenz like chaotic reversal of main flow along the loop appeared in rather shrunk parameter region which locates in unstable region of the steady main flow. The chaotic region is surrounded by broad turbulent stable region. On the edge region between chaos and turbulent stable, the behavior has delicate sensitivity for experimental, initial and computational conditions. As a result of long time running of this simulation on the edge region, spontaneous regime shift can be seen, where we can see spontaneous transition between chaotic and turbulent stable regimes. This simulation suggests that the low order chaos in real fluid with infinite degree of freedom also fragile and can be revived artificially or spontaneously.

1. 始めに

地球流体はカオス・システムであるかと問えば、ほとんどの人が「Yes」と答えるだろう。しかし、ではどのようなカオス・システムかと問えば、それに答えることは今でも難しい。このような現状では、「Yes」と答えても虚しい。純粋数学の世界ではともかく、応用数学及び物理系の世界では、1963年アメリカ気象学会誌に掲載されたE.N.Lorenzによる「Deterministic Non periodic Flow」と題する論文によってカオス研究の歴史は始まった、と言えるだろう。それも、その真価が広く認識されるのは、約二十年も経過してから、それも数学者による指摘から始まった。このように最も有名なカオス・システムのひとつである「ローレンツ・カオス」に対しては、今も重要な疑問が付いて回っている。すなわち、「たった3つだけの変数でもカオスが起こるから多自由度なら当然カオスなのか?」それとも、「自由度が少なすぎるゆえに、そのシステムはカオスとして振舞わなくてはならないのか?」

ここで、ローレンツ・カオスに関する簡単な歴史を振り返っておこう。E.N.Lorenzはいわゆるローレンツ・システムを、B.Saltzmanが導いた Benard 対流を表現するかなり簡略化された方程式系をさらに簡略化して導いた。一方、P.Welandarは Thermo siphon 内の流体の流れを単純化した方程式系が奇妙な振動を起こすことを示した。また、Creveling et alはトーラス状の閉じたループ内の流体を下部加熱・上部冷却することによって、ループ内主流の向きが不規則に振動する現象を調査した。このように、流体の熱対流に関するカオスの研究は、全く別々のルートで始まっていた。Yorke and Yorkeはローレンツ・システムを閉ループ内熱対流のトランケーション・モデルとして同定し、2つの研究ルートが接点を持つに至った。そして、偏微分方程式において現れるローレンツ的なカオスをシミュレートした。ただし、彼らは、流速はループに沿った成分のみを持つという基本的な仮定を前提としていた。確かに、この仮定の上では、ローレンツ・カオスの振る舞いは、かなり「Robust」なものではある、しかし、他の速度モードは無視できるものではない。Suda and Mimuraは、トーラス状の閉ループを使った熱対流実験を行ない、主流に重なった細胞上の流速モードの存在を示し、かつ主流がカオス的に反転を繰り返すことを示した。また、O.Sanoは全く同様の閉ループを使って、主流の代わりに3次元的な細胞状の構造が現れ、それがカオス的に振動することを示した。一体、真実はどこにあるのか? そもそも、ローレンツ・カオスは無限自由度を持つ現実流体の中で、実現するかどうか?言い換えると、無限自由度をもつ流体が、自ら、小自由度の振る舞いを選択する条件は何なのか?

このような問題意識をもって、我々は、断面が円形であるトーラス型の閉ループの代わりに、断面が長方形である、アニュラス

型の閉ループを使って、更なる実験に取り組んだ。その理由は、上昇流がトーラスの環壁にぶつかる事によって、ループ内の流れがより複雑なものになる可能性があるからである。それに比べると、アニュラス型の場合は、流速分布が2次元的な流れが実現する可能性があるからである。ところが、アニュラス型の閉ループ内熱対流実験においては、主流がカオス的に反転することはめったに起きなくなった。絶対に起きないのではなく、めったに起きなくなってしまった。我々の室内実験では、現実の内部流はいつもループ管壁に垂直な速度成分を持つことが明らかである。この速度成分は内部流に様々な多様性を与える可能性がある。実際、実験パラメータは共通でも、ある日の実験ではカオスの反転が見られるのに、別の日の実験では見られないことがある。連続体として無限自由度を持つ現実の流体系において、まるで低次システムのカオスのような振る舞いが実現する条件は、極めて「Sensitive」なものであった。

2 実験装置・結果

我々のアニュラス型閉ループは、下部半分が温水槽に浸され、上半分は低温水循環装置に繋がれた冷却水槽に浸されている。管壁温度一定の条件下における、閉ループ内熱対流実験である。ループ内の中央部、偏角0度、90度、180度、270度(即ち、右、上、左、下)の4点の温度を、熱電対を使って記録した。左右の温度差はループ内主流の向きを示す指標となる(Fig.1)。

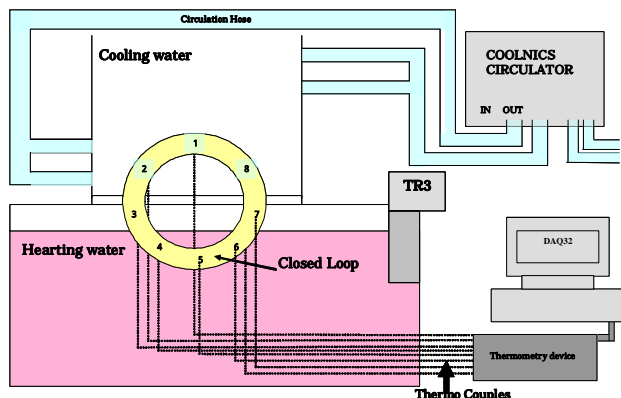


Fig.1 Experimental device

Fig.2は、動作流体として真水を使い、加熱部と冷却部の温度差を30に設定した実験結果である。上図は主流がカオスの反転を起こしている時の例であり、下図は主流の向きが反転しない時の例である。両実験の条件の差は閉ループの構造上の微妙な差異である。その差異は意図したものではなく、製作工程の違いから生まれた、素材や外形の差異である。一方は前後面の断熱性優先の製

作方法、他方は側壁の伝熱性優先の制作方法である。このような微妙な差異が主流のカオスの反転の有る無しに関わっている事は驚くべきことである。また、同じ断熱優先の装置を使っても、時々反転が起きないこともしばしば見られた。このような「Sensitivity」を説明できるような解釈が求められる。

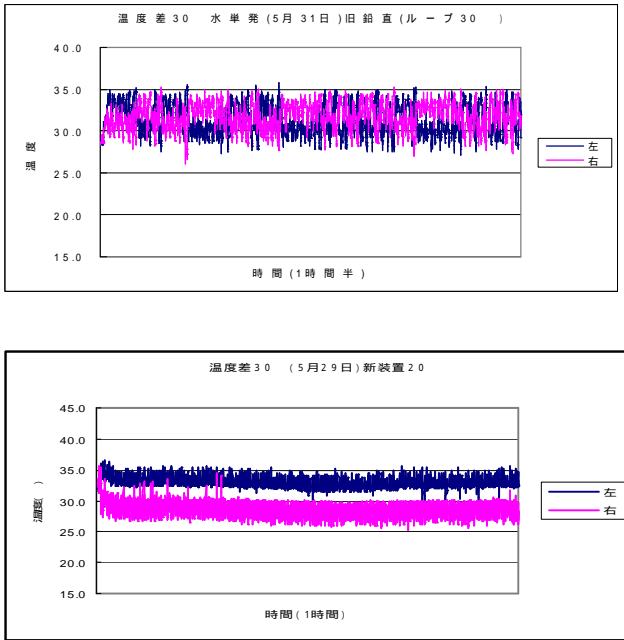


Fig.2 Time series of temperature at left and right points in a loop; the upper(lower) is a example with(without) chaotic reversal,.

3. 2次元格子点モデルおよび最低次モデル

上記の「Sensitivity」を理解するために、室内実験に対応した数値実験を行う。鉛直設置されたアニュラス型の閉ループ内の粘性ブジネスク流体の渦度方程式と熱の式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega = -J(\psi, \omega) + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \nabla^2 \omega + \left(\frac{\partial}{(1+\varepsilon)\partial r} (1+\varepsilon)T \cos\theta - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} T \sin\theta \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T = -J(\psi, T) + \frac{1}{Pr\sqrt{Gr}} \nabla^2 T,$$

where, $Gr \equiv \frac{\beta g \delta T D^3}{\nu^2}$, $Pr = \frac{C\mu}{\lambda}$, $\varepsilon = \frac{2a}{R\pi}$

である。無次元実験パラメータは Gr , Pr , の3つである。この偏微分方程式を円筒座標表現の格子点モデルで差分化し、境界条件として、側壁での粘着条件、側壁温度は $-\sin(\theta)$ で与えられ、渦度から流線関数を求めるためのポアソン方程式を解くに当たっては、先に境界条件の時間発展を求めてから、内部の流線関数を、緩和法で求めた。シミュレーションの結果得られた、主流を持つ定常状態は、流線関数が $\sin(r)$, 温度分布は $\cos(\theta)\cos(r)$ と $\sin(\theta)\cos(r)$ の線形結合で近似される事がわかったので、これら3モードの振幅を各々 $X_{01}(t)$, $CC_{11}(t)$, $SC_{11}(t)$ とおいた時、次のような3変数のトランケーション・モデルを得る事が出来る。

$$\frac{\partial}{\partial t} X_{01} = -\frac{X_{01}}{\sqrt{Gr}} + \frac{CC_{11}}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} CC_{11} = \varepsilon X_{01} \left(1 - \frac{8}{3\pi} SC_{11}\right) - \frac{CC_{11}}{Pr\sqrt{Gr}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} SC_{11} = \frac{8\varepsilon}{3\pi} X_{01} CC_{11} - \frac{1}{Pr\sqrt{Gr}} SC_{11}$$

この常微分方程式系は定常解

$$X_{01s} = \pm \frac{3\pi}{8} \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon Pr} \left(1 - \frac{2}{\varepsilon Pr Gr}\right)}$$

$$CC_{11s} = \frac{2}{\sqrt{Gr}} X_{01s}$$

を持ち、線形安定性解析により、主流の中立曲線の式

$$\varepsilon Gr = 2 \frac{1 + 4/Pr}{1 - 2/Pr}$$

を得る(Fig.3).

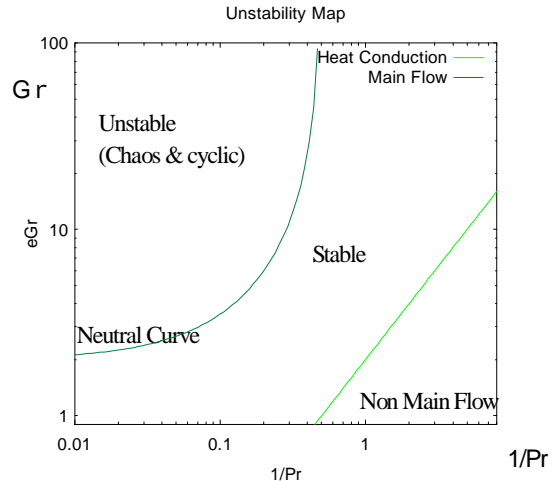


Fig.3 Stability map of 3 variable model

4. 数値実験結果の分類

室内実験に合わせて、アスペクト比 (R/a) は20に固定し、 Pr と Gr を変化させて、格子点モデルの数値実験を行った。初期条件は、最低次モデルの定常解に近い温度速度分布から始めた「主流有り」条件と、定常解とかけ離れた温度速度分布から始めた「主流無し」条件の2種類を行い、計算結果のアニメーションを観察することでアトラクターの分類を行った (Fig.4).

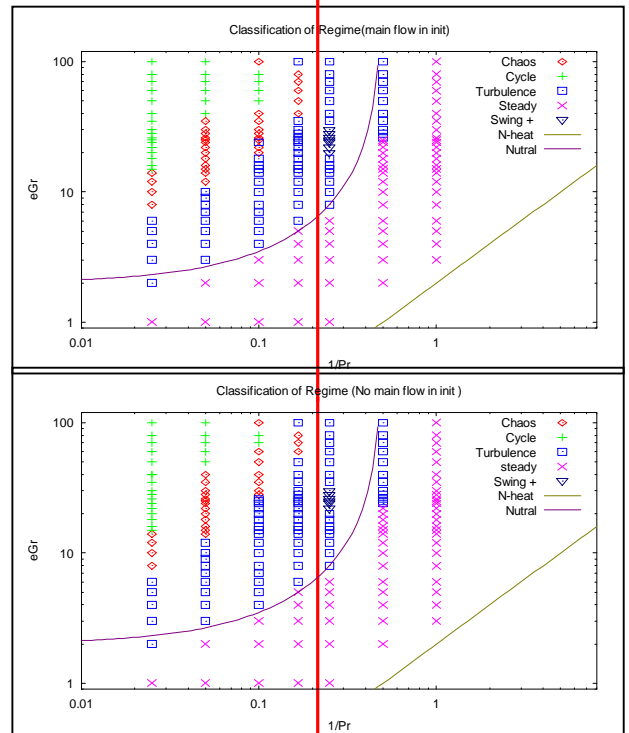


Fig.4 Classification of attracter; The upper(lower) is a case with(without) initial main flow.

Fig.4 中の記号は各々、

- × は層流の定常安定状態(Fig.5a)、
 - は温度場・速度場共に激しく時間変動しながら、総主流量としては定常に落ち着く乱流安定状態(Fig.5b)、
 - △ は全体として乱流状態ながら総主流量がカオス的に反転を繰り返すカオス状態(Fig.5c)、
 - + は全体として乱流状態をながら総主流量がほぼ周期的に1回ずつ反転を繰り返す乱流周期状態(Fig.5d)
- を表している。

分類図は全体としてよく似ており、初期条件依存性は小さいことが分かる。しかし、室内実験で使用した流体の水の物性を表す図中の縦の太い実線 (Pr=5~6) は、カオス領域のほとんど境界部分でのみ交わりを持つことが分かる。このようなカオス領域の縁辺近くでは、初期条件依存性は無視できない。

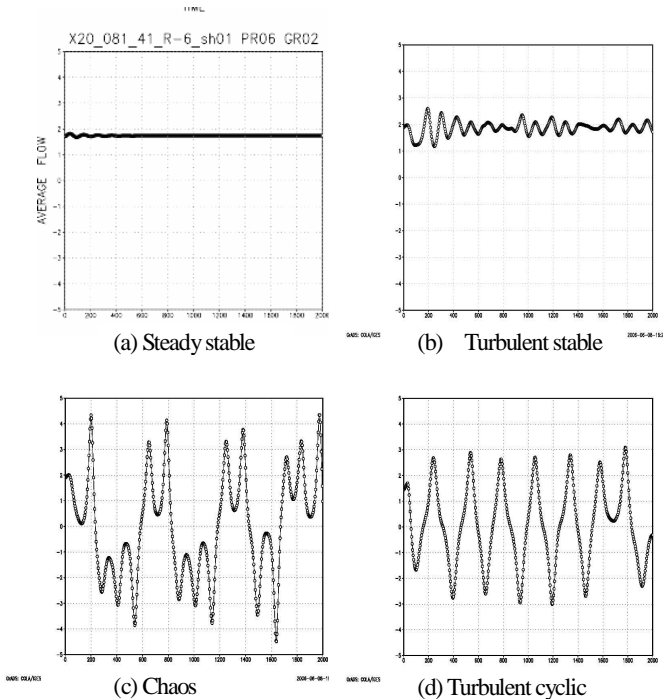


Fig.5 Typical patterns of temporal change in total main flow

5. カオス領域の縮小について

格子点モデルでは、3変数モデルに比べてカオス領域が大きく縮小する理由にはなにか、考えられることの一つは、3変数モデルでは表現できない乱流が発生していることである。しかしながら、乱流を表現するにはトランケーションを緩くしなければならないが、あまり緩めると変数が多くなりすぎ理論的見通しが悪くなる。

そこで、シミュレーション結果の時系列の全てに各時刻毎に上記3モードでフィッティングを行い (green line)、それらが3変数理論値(black line)とどの程度一致しているかを調査した (Fig.6)。

定常安定領域でも既に主流モード (X01) において3変数理論からより小さい方向にズレが生じていることが分かり、乱流安定領域では水平温度差モード (Cc11) はほぼ理論どおりであるが、鉛直温度差モード (Sc11) が大きめにズレ、主流モードにおいてはさらに複雑にズレが生じている。

主流のカオス的的反転領域では主流モードと水平温度差モードが理論から大きくずれてゼロに近づいているのはこのデータ処理の性格上、符号が反転するものを時間平均したのだから、当然予想されることである。一方、鉛直温度差モードではカオス反転領域で再び3変数モデルの理論値に近いことが興味深い。

そこで、フィッティングされた速度・温度場からの残差を時間平均した図を作成した(Fig.7)。定常安定領域では新たに $\sin(2\pi t)$ $\sin(2\pi t)$ で表現される8細胞の速度モードと $\cos(\pi t)$ $\cos(3\pi t)$ で表現される新しい温度モードが表れている。乱流安定領域ではさらに多くのモードが追加されているように見える。また、すべての実験パラメータに共通して、流線関数分布は接線方向にだけ回転すると対称性を持ち、一方、温度分布はだけ回転すると反対称性を持っていることに気が付く。この対称性は定常安定領域では厳密に維持され、また、乱流状態では、この対称性はやや破壊されるがその程度は1/100の程度に抑えられている。

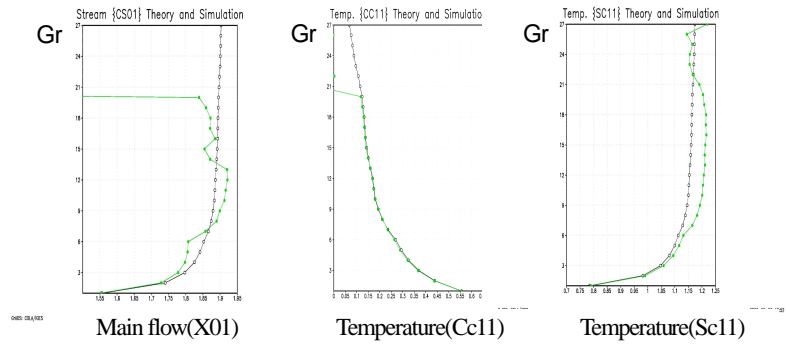


Fig.6 3 mode fitting (theory and analysis)

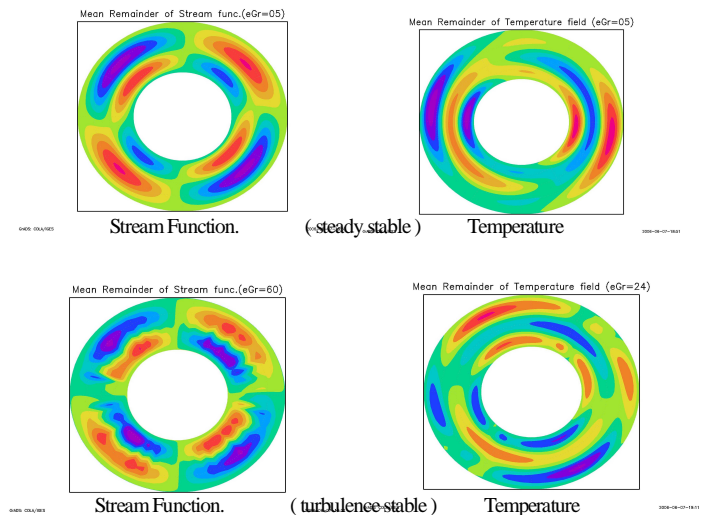


Fig.7 Remainder from 3 modes fitting

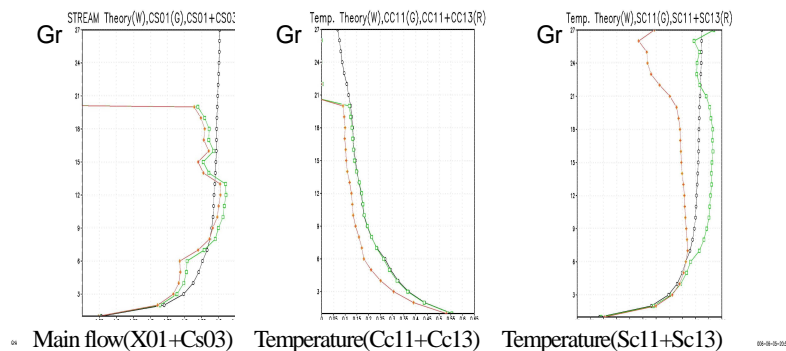


Fig.8 21 mode fitting (theory and analysis)

これら新しいモードは、この閉ループ内熱対流に対して、どのような役割を演じているのだろうか。それを調べるために、これら新モードを含むように、トランケーション波数を最大で3まで含むように、緩めたものを作成した。変数の数は21に増加した。

そこで、再び、シミュレーション結果の時系列の各時刻毎に21変数モードでフィッティングを行った。そして、元の3変数モードに新しいモードを加えて、それら合成モードで表現される、総主流量、ループ内左右温度差および鉛直温度差を求めた(Fig.8)。

その結果、主流モードにおいては、元々のX01モードのほかにCs03(すなわち $\sin(3r)$ パターン)モードが総主流量に貢献し、それらを合成すると結局、新モードは総主流量を低下させる傾向があることが分かる(red line)。また、水平温度差に関しては、Cc13(すなわち $\cos(\cdot)\cos(3r)$ パターン)が貢献し、それらを加えると水平温度差を低下させる傾向があることが分かる(red line)。鉛直温度差においてもまた、Sc13(すなわち $\sin(\cdot)\cos(3r)$ パターン)が貢献し、鉛直温度差を低下させる傾向を持つ(red line)。これら以外のモードもたくさん存在するが、これらは大きさが小さいか、あるいは小さくはないが正負の両符号を持ち、全体としては大きな貢献をしていないことが推測される。

さらに、これら主要な新モードCs03、Cc13、Sc13の半径方向プロファイルから考察すると、元のSinusoidalなプロファイルがループの中央付近では平坦化され、側壁近傍では勾配が増加する傾向を持つことが分かる。すなわち、側壁での壁面摩擦を増大させ、かつ、壁面での熱フラックスを増大させる傾向を持つ働きをする。この関係が総主流量や水平・鉛直温度差を小さくしている事と合わせて、小自由度の3変数モデルではカオス領域の中にあるにもかかわらず、格子点モデルのシミュレーションでは乱流安定状態として、カオスの反転が抑制されている理由であると考えられる。

6. カオスの消滅と復活

カオス領域の縁辺では、カオスの振る舞いは初期条件や計算精度に対し非常にデリケートなSensitivityを持つことが予想される。Fig.9は $Pr=6$ 、 $Gr=60$ の時、計算条件としては、空間分解能は接線方向に81格子点、半径方向に41格子点、時間刻み幅1/100で無次元計算終了時刻2000の全主流量の時系列である。Fig.9上図の黒線と緑線は初期条件は主流有りと共通であるが、各時間ステップ毎のポアソン方程式を解くに当たって、相対許容誤差を1/100(黒線)と緩くしたものと1/1000000(緑線)と厳しくしたものである。時間400あたりまでは両者はよく一致し、その後はまったく異なった時系列となる。しかし両者ともカオス的反転を繰り返しているという点では共通している。総主流量はまるで少自由度カオス系の代表であるLorenz Systemの振る舞いのように、滑らかに変化しているが、速度・温度分布は時間的・空間的に絶えず乱れており、乱流を含みながら全体としてはカオス的に大規模な変動を繰り返している。しかしながら、黄線は許容誤差は緑線の場合と共通であるが、初期条件として主流がゼロで2細胞状速度分布、かつ初期温度分布がループの内部まで側壁温度に一致するという、装置の対称性や3変数モデル定常解とは全く整合性の無い極めて不安定な状態を選んだものである。始めのうちは主流成分はほとんどゼロだが、やがて反時計回りに急速に加速された後、一度時計回りに主流の向きが変わり、その後は小さく変動しながらもずっと時計回りが維持されている。そのとき温度・速度分布は絶えず乱れ続けている。いわゆる乱流安定状態を続けていることが分かる。このように、同じ実験条件でもカオスと乱流安定という2種類のアトラクターを持ち、初期条件により、いずれかのアトラクターが選ばれるように見える。

しかしながら、この種の強い非線形性を持つ系の数値実験には、

空間・時間分解能に起因する誤差のほか、数値の丸め誤差や緩和法の許容誤差など様々な種類の計算誤差が含まれている。これらの誤差をすべて無くすることは現実的に不可能である。

そこで、観点を変え、乱流安定のアトラクターに落ち着いた計算例は、初期条件が境界条件とあまりにもかけ離れているために、非常に強い乱流が作られたためであると考えた。従って、この乱流安定化した計算結果の最終状態に、人為的に小細工を施すことで、カオスが復活する可能性を調査した。Fig.9の下図は、保存されていた最終状態の速度温度分布に唯一度だけ人為的処理を施し、後は、先の数値計算と全く同じ計算条件でさらに無次元時間2000まで、時間発展を継続したものである。処理の仕方としては

- 1) 流線関数分布を接線方向に1周平均し乱流成分を消す。
- 2) 先に挙げた回転対称性に着目し、流線関数の回転反対称成分を消し、温度分布の回転対称成分を消す。
- 3) 流線関数および温度分布に3変数モデルの3モードフィッティングを施す。

いずれの処理でも、唯一度の処理で、カオスの反転が復活することが分かった。カオスの振る舞いはとても壊れやすいものでもあるが、一方、復活させることもまた、容易であった。

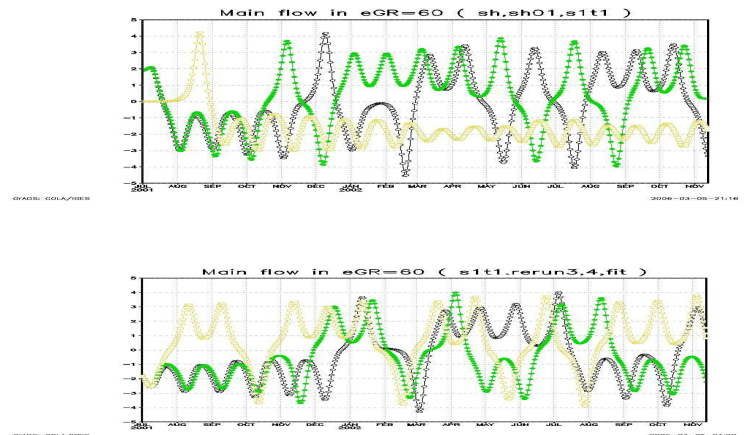


Fig.9 Vanishing and Revival of Chaos Behavior

7. LONG RUN と Regime Shift

カオスが壊れやすく復活も容易であるならば、カオスと乱流安定の間の自発的なレジーム・シフトも起こりうるかもしれない。計算条件は空間分解能 81×41 、時間刻み幅1/100、緩和法の許容誤差は1/1000000に固定し、実験条件は $Pr=6$ 、 $Gr=70$ および80で、ひたすら無次元計算終了時刻20000まで計算を走らせた結果がFig.10である。

$Gr=70$ の場合は計算終了時刻が2000の時にはカオス的反転が最終的なアトラクターであると判断していたが、生産終了時刻を20000まで伸ばすことで、自発的に振る舞いの質が変化することがわかった。無次元時間の3000過ぎまではカオス的反転が続いていたが、その後乱流安定状態に変化し、やがて再びカオス的反転が現れてはまた乱流安定となり、その後、三度目のカオス的反転が復活している。 $Gr=80$ の場合には、計算終了時刻の20000までの間、ほとんどの時間はカオス的反転レジームに居ようであるが、時々、乱流安定的に振舞っている。

これは自発的レジーム・シフトと呼べるのであろうか。計算誤差のなせる技と呼ぶべきなのだろうか。もちろん計算誤差が無いわけでは決して無い。一方、現実の流体実験あるいは自然界においては、完璧に外的条件が一定に維持されることも有り得ないし、

絶えず、何らかのノイズを被っている。この数値実験結果は、無限自由度を持つ現実流体中に、あたかも低自由度のカオス系のような振る舞いを起こす条件について重要なヒントを与えてくれていると考えられる。

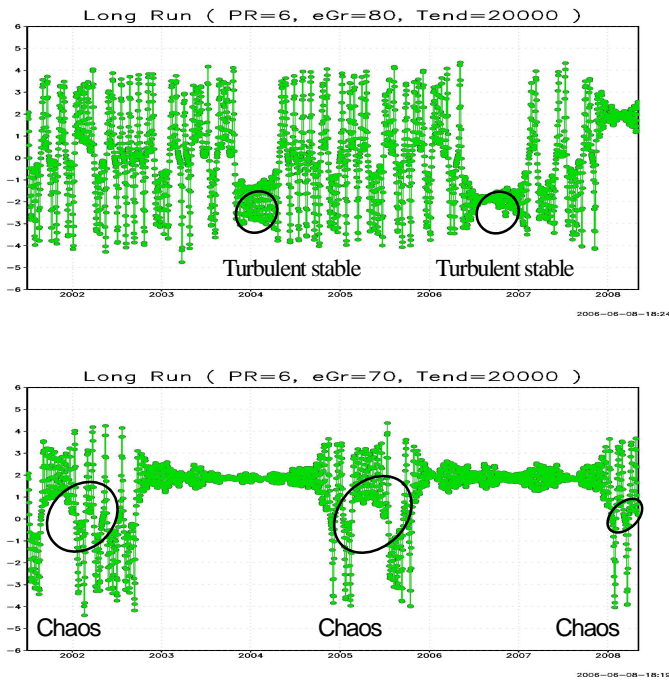


Fig.10 Spontaneous Regime Shift
The upper(Lower) is the long run result in the case of Gr=80(70)

8 .最後に

最低次のトランケーション・モデルである3変数モデルにより、定常解の線形安定性が調査された。Prが2より小さなさらさら流体では、定常解は常に安定であり、Prが2より大きなねばねば流体では、Grが

$$\varepsilon Gr = 2 \frac{1 + 4 / Pr}{1 - 2 / Pr}$$

を超えると定常主流解が不安定となることが分かった。そこでは、主流のカオスの反転が予想される。一方、格子点モデルで数値実験をおこなった結果、定常主流解の安定領域では実際に3変数モデルの定常解によく似た定常パターンが再現された。ただし、より詳細に見ると、いくつかの新しいモードも励起されており、それらは、側壁面摩擦や側壁面熱伝達を大きくする傾向を持ち、その結果、より小さな主流モードが実現していた。また、主流の不安定領域の多くでは、カオスの反転のかわりに乱流安定状態が見られた。しかしながら、カオスの反転領域が無いわけではなく、その領域は3変数モデルの結果に比べてかなり縮小したものであった。

しかも、室内実験でよく用いられる水のPrは5~6の値を取り、このカオス領域の境界との交わりはGrの極めて狭い範囲のみである。このようなカオス領域の縁辺領域では、わずかな初期条件の差や、計算誤差の集積により、振る舞いの特徴はDelicateなSensitivityを持つ可能性がある。実際、初期条件を変更したり、格子点モデルの空間解像度を変更することによって、計算結果が、乱流安定とカオス反転の間を大きく、揺れ動く。この事実が、室

内実験で再現性が良くない理由かもしれない。

また、乱流安定化した最終状態に唯1回だけ、乱流を消すような小細工を施してやると、容易にカオス反転を復活させることができた。このことは、カオスと乱流安定の間の自発的なRegime Shiftが起こる可能性を示唆している。

最後に、カオス領域の縁辺のパラメータ領域で、計算パラメータは全く以前と共通で、ただひたすら長時間のシミュレーションを行うと、期待していたとおり、Regime Shiftが見られた。これら一連の数値実験は、無限自由度を持つ現実流体中の低次カオスもまた、このようなSensitivityを持っていることを示唆している。すなわち、室内実験において現れる主流のカオスの反転もまた、壊れやすく、かつ、人工的あるいは自発的に復活させられるものであるかもしれない。

今後は、この時系列データを詳細にデータ解析し、カオスRegimeと乱流安定Regimeの比較を行って、無限自由度を持つ現実流体中にあたかも少自由度のカオスのような現象が起きる条件を明確にしたい。

参考文献

Lorenz, E. N. 1963: Deterministic Nonperiodic Flow. Journal of Atmospheric Science, Vol.20, pp130-141.

Saltzman, B. 1962: Finite amplitude free convection as an initial value problem - . Journal of Atmospheric Science, Vol.19, pp329-341.

Welander, P. 1967: On the oscillatory instability of a differentially heated fluid loop. Journal of Fluid Mech. Vol.29, part I, pp17-30.

Creveling, H. F., J. F. de Paz, J. Y. Baladi and R. J. Schoenhals 1975: Stability characteristics of a single-phase free convection loop, Journal of Fluid Mech. Vol.67,, pp65-84.

Yorke, J. A. and E. D. Yorke 1981: Chaotic behavior and fluid dynamics, in: Hydrodynamic Stability and the Transition to Turbulence (Springer, Berlin) ch.4

Suda, F. and K. Mimura 1989: Temperature and velocity distribution in a circular natural convection loop, 24th National Heat Transfer Symposium, Japan, Vol.3 Pp752-754 (in Japanese)

Sano, O. 1991: Cellular structure in a natural convection loop and its chaotic behaviour. I. Experiment, Fluid Dynamic Research, Vol.8 pp189-204

Sano, O. 1991: Cellular structure in a natural convection loop and its chaotic behaviour. II. Theory, Fluid Dynamic Research, Vol.8 pp205-220