

渦の統計とジェットから生じる渦列の渦位分布について

九州大学 応用力学研究所

伊賀 啓太 (IGA Keita)

概 要

ジェットがその不安定性から蛇行をして生じる渦列に対し、渦に関する統計力学の理論を適用した。この理論から予想される渦列の流線関数と渦位の関係は数値計算で実現されたものとよく一致しており、理論がこの渦列にも適用できることがわかった。ただし、この結果は二つの領域に分けられて、それぞれの領域で関係式に用いるパラメータが異なる。これは、蛇行から生じる渦の混合がある程度の範囲にまでしか及ばないことを意味しており、どの程度の距離まで混合が到達するのかが新たな問題として生じてくる。

1 はじめに

黒潮が日本の南岸から離岸した黒潮続流域では多くの渦が見られる。これはジェットの不安定性から生じた蛇行によって形成されたものと考えられる。一方、大気では、山の風下に弱風域が形成され、しばしばそこには不安定によって渦列が発達する。このように、大気や海洋にはジェットや弱風域から渦列が生じるという現象がよく見られる。ここではそのような不安定の中でも、順圧不安定から発達する渦列について考えることとし、1層の準地衡流方程式系で形成される渦列の渦位分布について調べる。

2次元流において、十分に時間が経過して定常になった状態における統計理論は Robert and Sommeria (1991) によって提案されている。特に Sommeria et al. (1991) は初期状態において2種類の渦位のパッチからなる流れにこの理論を適用しており、2種類の渦位パッチで表現される流れとしてシア一流を考えて、到達する平衡状態についての統計理論の検証・考察を行っている。さらに、Thess et al. (1994) では3種類の渦位のパッチからなるジェット流が最終的に到達する状態についての統計理論の検証・考察を行っている。

2 渦の混合に関する統計理論

まず、Robert and Sommeria (1991) によって提案された渦の統計理論をまとめる。なお、ここでの表式は、これよりも簡潔でわかりやすくまとめられた石岡 (1998) に従ったものである。

2.1 保存量

基礎方程式として、大気や海洋の大規模な流れを記述する準地衡流渦位方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi - \lambda^2\psi) + J(\psi, \nabla^2\psi) = 0 \quad (2.1)$$

を考える。ここで ψ は流線関数、 λ はロスビー変形半径の逆数を表す。

この系にはいくつかの保存量が存在する。まずそれらを列挙しよう。

- 渦位保存

$$q \equiv \nabla^2 \psi - \lambda^2 \psi. \quad (2.2)$$

- (絶対) 運動量保存

$$M \equiv \iint dxdy \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} - \lambda^2 y \psi \right) = \iint dxdy \left(y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \lambda^2 y \psi \right) = \iint dxdy (y q). \quad (2.3)$$

- エネルギー保存

$$E \equiv \frac{1}{2} \iint dxdy [(\nabla \psi)^2 + \lambda^2 \psi^2] = \frac{1}{2} \iint dxdy [-\psi \nabla^2 \psi + \lambda^2 \psi^2] = -\frac{1}{2} \iint dxdy (\psi q). \quad (2.4)$$

ここで、一つ目の渦位保存は残りの二つの量の保存とは意味が異なることに注意しなければならない。絶対運動量やエネルギーは領域全体を積分した量として保存則が成り立つのに対して、渦位は各点でラグランジュ的に保存するという意味での保存量である。それに伴って、絶対運動量やエネルギーと同様の領域積分した形では

$$I \equiv \iint dxdy f(q), \quad f(q) \text{は} q \text{の任意関数} \quad (2.5)$$

という無限の保存量を生み出す。

渦位がラグランジュ的に保存することにより、準地衡流方程式に従って時間発展する流れでは、初期に何らかの渦位の分布があれば、それが時間変化してもその渦位を持つ流体粒子の「配置」が変わるだけで、元の渦位の値の分布は変わらない。

2.2 混合に対する統計力学

簡単のため初期には全体が有限種類の渦位パッチで区切られているような状況を考え、渦位 Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) の領域がそれぞれ R_i の割合で存在するような初期状態があったとする。渦位の保存則から、各流体粒子は厳密にはもともとの渦位の値を保ち続ける。そのため、各渦位パッチはモザイク状に入り組んでいくだけで、定常な状態には到底到達しない。しかし混合が十分に進むとモザイク模様は細かくなっていき、入り組んだ渦位を巨視的に粗視化してその平均値で見ると、平衡状態に近付いていくことはよく起こることである。

そこで、最終的な粗視化した平衡状態を考えて、ある点 (x, y) の近傍において渦位 Q_i の流体が占める割合を $r_i(x, y)$ とする。すると、各点での渦位 q は

$$q(x, y) = \sum_{i=1}^n Q_i r_i(x, y) \quad (2.6)$$

と表されることになり、 $r_i(x, y)$ が求められれば平衡状態での流体の状態が記述できることになる。なお、この $r_i(x, y)$ はもともとの渦位パッチが再配置されただけであるから渦位 Q_i のパッチを全領域から集め直せば、もとの R_i になるはずである。

$$R_i = \iint dxdy r_i. \quad (2.7)$$

また、各点近傍において、各パッチの割合を全て加えれば当然 1 になる.

$$\sum_{i=1}^n r_i(x, y) = 1. \quad (2.8)$$

さて、平衡状態での $r_i(x, y)$ を決める原理についてであるが、 $r_i(x, y)$ を用いて混合エントロピー S を定義する.

$$S \equiv - \iint dxdy \left(\sum_{i=1}^n r_i \log r_i \right). \quad (2.9)$$

そして、統計力学で行われるように、平衡状態ではエントロピー S が極大になることを要請するのである. ただし、すでに見たようにこの系にはいくつかの保存量がある. そのため、これらの拘束条件のもとでの極大ということになる. 求める $r_i(x, y)$ をいろいろ変えた時にエントロピー S が極大になるという条件から S の変分は 0 にならなければいけないが、これらの保存量があるために保存量の変分が 0 になるという拘束条件のもとで S の変分が 0 になる条件を探すことになる.

そこで、まずこれらの保存量の変分を計算する.

- (絶対) 運動量保存

$$0 = \delta M = \iint dxdy (y \delta q) = \iint dxdy \left(y \sum_{i=1}^n Q_i \delta r_i \right). \quad (2.10)$$

- エネルギー保存

$$\begin{aligned} 0 = \delta E &= -\frac{1}{2} \iint dxdy [\delta \psi (\nabla^2 \psi - \lambda^2 \psi) + \psi (\nabla^2 \delta \psi - \lambda^2 \delta \psi)] \\ &= - \iint dxdy \psi (\nabla^2 \delta \psi - \lambda^2 \delta \psi) \\ &= - \iint dxdy (\psi \delta q) = - \iint dxdy \left(\psi \sum_{i=1}^n Q_i \delta r_i \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

- パーセルの面積保存

$$0 = \delta R_i = \iint dxdy \delta r_i. \quad (2.12)$$

- 確率分布の総和は 1

$$0 = \sum_{i=1}^n \delta r_i(x, y). \quad (2.13)$$

最後にエントロピー (2.9) の変分をとって

$$\delta S = - \iint dxdy \sum_{i=1}^n (\log r_i + 1) \delta r_i \quad (2.14)$$

となるので、(2.10)~ (2.14) が 0 になるという束縛条件のもとに (2.14) が 0 になるという条件を求めることになる. ラグランジュの未定乗数を導入して、

$$\delta F \equiv \delta S + \alpha \delta M + \beta \delta E + \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta R_i + \iint dxdy \epsilon(x, y) \sum_{i=1}^n \delta r_i(x, y) \quad (2.15)$$

が任意の変分に対して 0 になるよう r_i を決めればよい. つまり

$$-\iint dxdy \sum_{i=1}^n (\log r_i + 1) \delta r_i + \alpha \iint dxdy \left(y \sum_{i=1}^n Q_i \delta r_i \right) - \beta \iint dxdy \left(\psi \sum_{i=1}^n Q_i \delta r_i \right) + \sum_{i=1}^n \gamma_i \iint dxdy \delta r_i + \iint dxdy \epsilon(x, y) \sum_{i=1}^n \delta r_i = 0.$$

これが任意の変分 δr_i に対して 0 になるための条件から

$$\log r_i + 1 - Q_i(\alpha y - \beta \psi) - \gamma_i - \epsilon = 0 \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.16)$$

という関係が導かれる.

これを r_i について解くと

$$r_i = \frac{\exp[Q_i(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_i]}{\sum_{i=1}^n \exp[Q_i(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_i]} \quad (2.17)$$

となり, 従って渦位 q は流線関数 ψ を用いて

$$q = \sum_{i=1}^n Q_i r_i = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i \exp[Q_i(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_i]}{\sum_{i=1}^n \exp[Q_i(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_i]} \quad (2.18)$$

と表されることになる (Robert and Sommeria 1991).

3 簡単な場合への適用

前節では一般的な n 種類の渦位パッチがある場合の議論をしたが, 渦位パッチの種類が少ないいくつかの場合に適用してみよう.

3.1 2色問題 (シア一流の混合)

$n = 2$ の場合には

$$q = \frac{Q_1 \exp[Q_1(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_1] + Q_2 \exp[Q_2(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_2]}{\exp[Q_1(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_1] + \exp[Q_2(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_2]} \quad (3.19)$$

つまり

$$(Q_1 - Q_2)(\alpha y - \beta \psi) + (\gamma_1 - \gamma_2) = \log \frac{q - Q_2}{Q_1 - q} \quad (3.20)$$

の関係が得られる (Sommeria et al. 1991). 彼らはシア一流の数値計算を行い, 最終状態で (3.20) の関係がよく成り立っていることを示している.

3.2 3色問題 (ジェットとの混合)

初期条件の状態としてジェットの形状を表すためには最低限3種類の渦位パッチが必要となる. $n = 3$ の場合には (2.18) は

$$q = \frac{Q_1 \exp[Q_1(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_1] + Q_2 \exp[Q_2(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_2] + Q_3 \exp[Q_3(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_3]}{\exp[Q_1(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_1] + \exp[Q_2(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_2] + \exp[Q_3(\alpha y - \beta \psi) + \gamma_3]}$$

となるが, 最も単純な対称なジェットを考え, $Q_1 = Q_0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = -Q_0$ とする. 初期状態に対応して平衡状態でも正の渦と負の渦の対称性が保たれると仮定すると $\gamma_1 = \gamma_3$ でこれを γ と書くことにすると

$$\begin{aligned} q &= \frac{Q_0 \exp[Q_0(\alpha y - \beta \psi) + \gamma] - Q_0 \exp[Q_0(\alpha y - \beta \psi) + \gamma]}{\exp[Q_0(\alpha y - \beta \psi) + \gamma] + \exp[Q_0(\alpha y - \beta \psi) + \gamma] + 1} \\ &= \frac{2Q_0 \exp(\gamma) \sinh[Q_0(\alpha y - \beta \psi)]}{2 \exp(\gamma) \cosh[Q_0(\alpha y - \beta \psi)] + 1} \end{aligned} \quad (3.21)$$

という関係を得る (Thess et al. 1994).

4 数値計算

この節では, 数値計算を行なった結果を示す. 数値積分する式は (2.1) に小さなスケールの細かい構造をならす超粘性項を加えた

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi - \lambda^2 \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi) = -\nu \nabla^6 \psi \quad (4.22)$$

である. x 方向に $\sin$ 関数と $\cos$ 関数で, y 方向に $\sin$ 関数で展開する擬スペクトル法を用いて数値計算を行った. 切断波数は x 方向に 21, y 方向に 85, 変換格子 x 方向に 64, y 方向に 128, 領域の大きさと境界条件は x 方向は $L = 2\pi$ の周期境界, y 方向は $2L = 4\pi$ で境界で $v = 0$ とする. ロスビー変形半径の逆数は $\lambda = 0.5$ で超粘性係数は $\nu = 4.0 \times 10^{-6}$ である. 時間積分はリープフロッグ (20 回に 1 回ホインスキームをはさむ) で時間ステップは $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3}$ とした.

初期条件として渦位分布が

$$q = \begin{cases} -4.0 & (-0.75 < y < 0) \\ 4.0 & (0 < y < 0.75) \\ 0 & (|y| > 0.75) \end{cases} \quad (4.23)$$

となるような渦位分布を持つようにおき, これに微小擾乱

$$\psi'(x, y, 0) = 0.02 \exp(-4y^2) \times \sin x$$

を重ねた. 図 1 に実際に用いた初期の流線関数, 速度, 渦位の分布を示す. ギブスの現象を防ぐために, 実際に計算に用いた q の分布は階段関数的に変化するのではなく若干滑らかな関数としている.

図 2 に流線関数場の時間発展の様子を示す. 時刻 $t = 40$ 頃には, 流線関数はほぼ一定の形を保ったまま x 方向に進むという, 定常な状態に到達している.

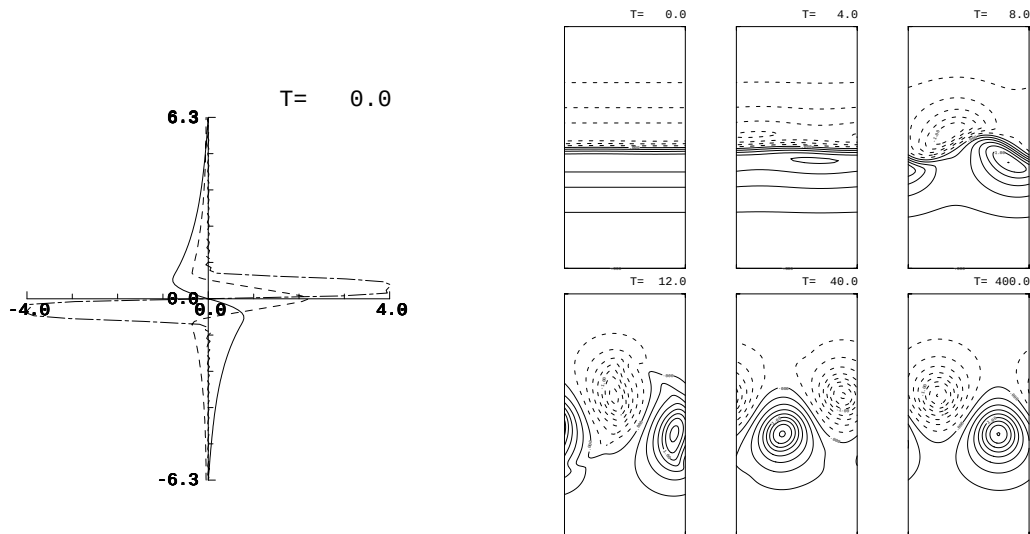


図 1: 初期における流線関数 (実線), 速度 (破線), 渦位 (一点鎖線). 渦位が $+4.0$, -4.0 , 0.0 の三つの値をとるように設定してある.

図 2: 流線関数の時間変化. ジェットは蛇行して渦列を形成する. $t = 40$ ではほぼ定常な状態に達している.

図 3 は, 十分に定常に達しているとみなせる $t = 400$ の, 各変換格子点における流線関数と渦位の散布図である. 図には理論式 (3.21) から予想される関係も描いてあるが, この理論曲線とよく一致していることがわかる. ただし, $q = 0$ 付近にこの曲線にのらない別の枝も見える. これは図 4 に示したような上下に離れた領域の格子点に対応するもので, 渦の混合が十分に及んでいない領域ではこの関係が成り立っていないことを示している.

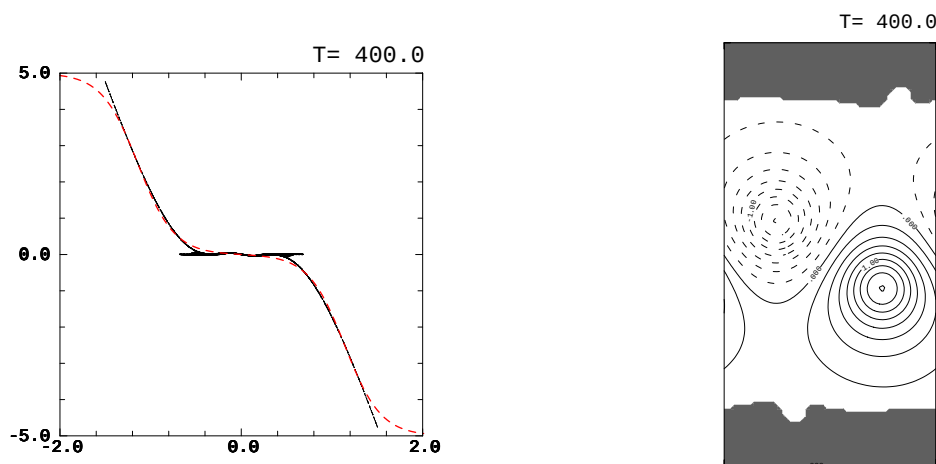


図 3: $\psi - \alpha y / \beta$ (横軸) と渦位 (縦軸) の関係を示した散布図. $\alpha / \beta = -0.11$, $\beta = 1.0$, $\gamma = -5.7$ とした時の (3.21) 式の関係破線で示してある.

図 4: $t = 400$ の時の流線関数. 図 3 に見られる別の枝ののっている格子点の位置に陰をつけている.

初期状態としてガウシアン形のジェットを選んだ場合にも同様の計算を行った

が, 初期状態において単純な 3 色の渦位パッチでは表されないにも関わらず, 理論式 (3.21) がよく成り立っていることがわかる. ただしもう一つの別の枝があることも同様である.

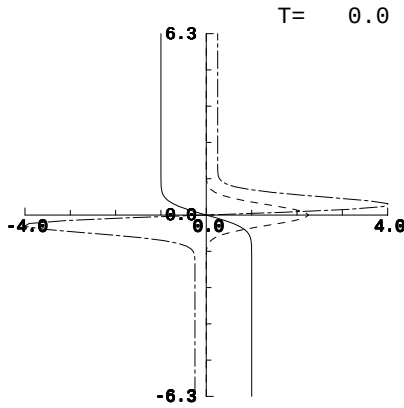


図 5: ガウシアンジェットの初期における流線関数 (実線), 速度 (破線), 渦位 (一点鎖線).

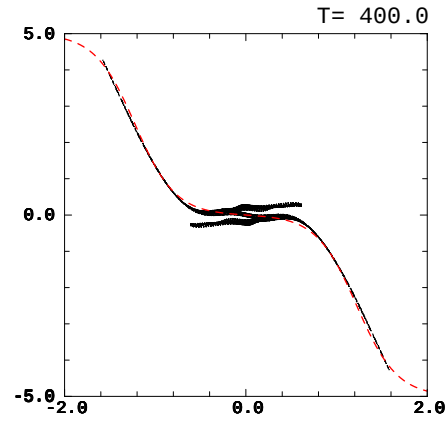


図 6: ガウシアンジェットの場合の, $\psi - \alpha y/\beta$ (横軸) と渦位 (縦軸) の関係を示した散布図. 破線は $\alpha/\beta = -0.26$, $\beta = 0.90$, $\gamma = -5.5$ とした時の (3.21) 式の表す関係.

5 まとめ

ジェットの不安定から生じる渦列に対して, 渦の統計力学の理論を適用した. その結果以下のようなことがわかった.

1. 理論で示された関係式は数値計算の結果をよく表す.
2. ただし, この関係式には二つの「枝」がある. これは, 混合の起こる範囲が十分な距離にまでは広がっていないことを意味する.

参考文献

- 石岡 圭一 (1998) 2次元非発散流の統計的平衡解とその計算法について, 数理解析研究所講究録「流れの非線形性と乱流の統計性質」, **1029**, 164-175.
- Robert R. and J. Sommeria (1991) Statistical equilibrium states for two-dimensional flows, *J. Fluid Mech.*, **229**, 291-310.
- Sommeria J., C. Staquet and R. Robert (1991) Final equilibrium state of two-dimensional shear layer, *J. Fluid Mech.*, **233**, 661-689.
- Thess A., J. Sommeria and B. Jüttner (1994) Inertial organization of a two-dimensional turbulent vortex street, *Phys. Fluids*, **6**, 2417-2429.